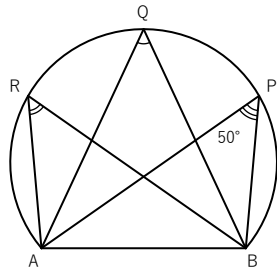


1 全体像	2～4 円周角の定理	5・6 直径と弧	7・8 定理の逆	9～11 利用
-------	------------	----------	----------	---------

1
 円の全体像 ― 何を学ぶかを先に見渡す

このページのゴール
 円周角とは何か、この単元でどんなことを学ぶかを、ざっとと言える



写せる角が 50° のカメラで、教室の黒板の両はし A、B がちょうど写るように撮ります。上から見た左の図で、カメラの位置を P、Q、R にしても、どれも $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = 50^\circ$ で、黒板がちょうど写ります。

ちょうど写る位置は1つではなく、A、B を通る円の弧の上に並びます。同じ2点 A、B を、この弧の上のどこから見ても、見える角は同じです。これがこの単元の中心になる決まり（円周角の定理）で、2ページで学びます。

中2までとくらべると

中2までは、円の中の角を求めるたびに、半径をひいて二等辺三角形や三角形の外角を使っていました。この単元の決まりを使うと、円の中の角が、1つの決まりで求められるようになります。

円周角の定理
 弧の両はしを見る角は、中心角の半分
 くわしくは 2～4ページ

円周上の点から弧の両はしを見る角（円周角）は、その弧に対する中心角の半分です。同じ弧に対する円周角は、点はその弧をのぞく円周上のどこにあっても等しくなります。

直径と弧
 直径は 90° 、弧が2倍なら角も2倍
 くわしくは 5・6ページ

直径の両はしを見る円周角は 90° です。1つの円では、弧の長さが2倍なら、円周角も2倍になります。

円周角の定理の逆
 角から、同じ円周上の点を見つける
 くわしくは 7・8ページ

同じ線分を、同じ側から、同じ角で見ている点は、1つの円周上にあります。見える角から、船の位置も分かります。

円の性質の利用
 接線の作図・長さ・相似
 くわしくは 9～11ページ

円の外の点から接線をひき、その長さを使います。円の中の相似な三角形を見つけて、長さを求めたり、相似を証明したりします。

この単元の解説記事（図と例題つき）：[かてきょノート \(katekyo-note.com\)](https://katekyo-note.com/)
<https://katekyo-note.com/%e3%80%90e4%b8%ad3%e6%95%b0%e5%ad%a6%e3%80%91e5%86%86%e3%81%ae%e8%a6%81%e7%82%b9%e3%81%be%e3%81%a8%e3%82%81%ef%bd%9c%e5%86%86%e>

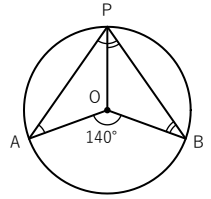
2 円周角とは？ — 中心角の半分

このページのゴール 円周角と中心角の関係（円周角の定理）を言い、角の大きさを求められる

① 弧・中心角・円周角

円周上の2点 A、B を両はしとする円周の一部分を**弧 AB** といい、 $\widehat{AB}$ と書きます（ふつうは短いほうの弧）。中心 O と A、B を結んでできる $\angle AOB$ を、 $\widehat{AB}$ に対する**中心角**といいます。

$\widehat{AB}$ をのぞいた円周上に点 P をとるとき、 $\angle APB$ を $\widehat{AB}$ に対する**円周角**という



② 中2のやり方で、 $\angle APB$ を求めてみよう

上の図は $\angle AOB = 140^\circ$ の円です。円周上の点 P、Q、R から見た $\angle APB$ ($\angle AQB$ 、 $\angle ARB$) を求めます。OA、OB、OP は半径で等しいので、 $\triangle OPA$ と $\triangle OPB$ は二等辺三角形で、底角は $(180^\circ - \text{頂角}) \div 2$ です（図は P の場合。同じ印の角は等しい角です）。

点	頂角 (A 側)	底角 (A 側)	頂角 (B 側)	底角 (B 側)	円周角 $\angle APB$ (底角の和)
P	110°	35°	110°	35°	$35 + 35 = 70^\circ$
Q	90°	45°	130°	25°	$45 + 25 = 70^\circ$
R	130°	25°	90°	45°	$25 + 45 = 70^\circ$

どの点でも $\angle APB$ は 70° で、中心角 $\angle AOB$ (140°) のちょうど半分です。

③ 円周角の定理

円周角の定理 ① 1つの弧に対する円周角の大きさは一定で、その弧に対する中心角の大きさの半分 ($\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$) ② 同じ弧に対する円周角の大きさは等しい（理由は3ページ）

④ 例

例1 $\angle AOB = 116^\circ$ のとき、 $\widehat{AB}$ に対する円周角 $\angle APB$ は、中心角の半分で $116 \div 2 = 58^\circ$ です。

例2 $\angle APB = 37^\circ$ のとき、同じ $\widehat{AB}$ に対する中心角 $\angle AOB$ は、円周角の2倍で $37 \times 2 = 74^\circ$ です。

例3 同じ $\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいので、 $\angle APB = 37^\circ$ なら、 $\widehat{AB}$ をのぞく円周上のほかの点 Q でも $\angle AQB = 37^\circ$ です。

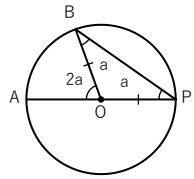
× 円周角が 35° のとき、中心角を半分の 17.5° とする ○ 中心角は円周角の2倍で 70° （1つの弧に対する中心角は1つだけ、円周角はいくつもあります）

合言葉 「円周角は、中心角の半分」

3 円周角の定理は、なぜ成り立つ？ — 半径2本で二等辺三角形

このページのゴール 円周角の定理が、二等辺三角形と三角形の外角から説明できることを言う

① 中心 O が $\angle APB$ の辺 PA の上にあるとき



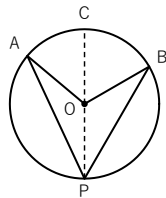
$\angle APB = a$ とする

$OP = OB$ (半径) だから、 $\triangle OPB$ は二等辺三角形で $\angle OBP = \angle OPB = a$

$\angle AOB$ は $\triangle OPB$ の外角だから $\angle AOB = \angle OPB + \angle OBP = a + a = 2a$

よって $\angle APB = \angle AOB \div 2$

② 中心 O が $\angle APB$ の内部にあるとき



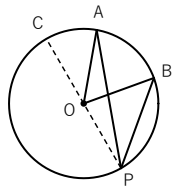
直径 PC をひき、 $\angle APC = a$ 、 $\angle CPB = b$ とする

①より $\angle AOC = 2a$ 、 $\angle COB = 2b$

$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = 2a + 2b = 2(a + b)$

$\angle APB = a + b$ だから $\angle APB = \angle AOB \div 2$

③ 中心 O が $\angle APB$ の外部にあるとき



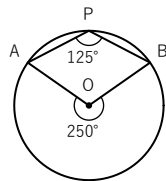
直径 PC をひき、 $\angle APC = a$ 、 $\angle BPC = b$ とする

①より $\angle AOC = 2a$ 、 $\angle BOC = 2b$

$\angle AOB = \angle BOC - \angle AOC = 2b - 2a = 2(b - a)$

$\angle APB = b - a$ だから $\angle APB = \angle AOB \div 2$

④ 中心角が 180° をこえるとき



P が短いほうの弧 $\widehat{AB}$ の上にあると、 $\angle APB$ は、P をふくまない長いほうの弧に対する円周角です。短いほうの $\angle AOB$ が 110° のとき、長いほうの弧に対する中心角は $360 - 110 = 250^\circ$ (180° をこえる角) なので、円周角は $250 \div 2 = 125^\circ$ です。②と同じ証明で成り立ちます。

× 外角 $\angle AOB$ を、底角と同じ a とする ○ 三角形の外角は、となり合わない2つの内角の和なので $2a$

合言葉 「半径2本で、二等辺三角形」

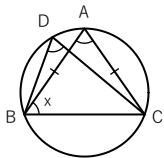
4 円の中の角はどう求める？ — どの弧から出ている角かを見る

このページのゴール 円周角の定理と三角形の角の性質を組み合わせ、いろいろな図の角を求められる

① 求め方の手順

- ① 求める角の両はしの点から、**どの弧に対する円周角か・中心角か**を決める
- ② その弧の**中心角**や、**同じ弧に対する円周角**を探す
- ③ 半分・2倍・等しい、を使って、図に角を書きこむ
- ④ 内角の和・外角・平行線の錯角で、残りの角を求める

② 例1 同じ弧に対する円周角と、三角形の内角の和

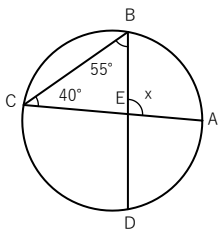


円周上の4点 A、B、C、D で、 $AB=AC$ 、 $\angle BDC=70^\circ$ のとき、 $\angle ABC$ (x) を求めます。

$x = (180 - 70) \div 2$ ← $\angle BAC = \angle BDC = 70^\circ$ (同じ $\widehat{BC}$ に対する円周角)。 $AB=AC$ なので $\angle ABC = \angle ACB$ 。 $\triangle ABC$ の内角の和

$x = 55$ ← 計算する

③ 例2 2つの弦が円の内部で交わってできる角

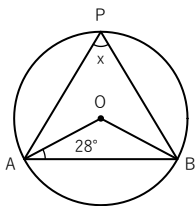


弦 AC、BD の交点を E とします。 $\angle AEB$ は $\triangle EBC$ の外角なので、となり合わない2つの内角の和 (2つの円周角の和) です。

$x = 40 + 55$ ← $\angle AEB = \angle ECB + \angle EBC$ (外角)

$x = 95$ ← 計算する

④ 例3 中心角と二等辺三角形 OAB



点 O は円の中心で、 $\angle OAB = 28^\circ$ のとき、 $\angle APB$ (x) を求めます。 $OA=OB$ (半径) なので、先に中心角 $\angle AOB$ を求めます。

$x = (180 - 28 \times 2) \div 2$ ← $OA=OB$ なので $\angle OBA = 28^\circ$ 。 $\angle AOB = 180^\circ - 28^\circ \times 2$ 。 x は $\widehat{AB}$ に対する円周角で、その半分

$x = 124 \div 2$ ← 計算する ($\angle AOB = 124^\circ$)

$x = 62$ ← 計算する

× 見た目が近い2つの角を等しいとする ○ 等しいのは、同じ弧に対する円周角だけ

合言葉 「まず、どの弧から出ている角かを見る」

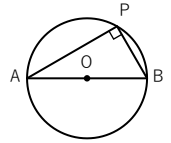
5 直径に対する円周角は？ — いつも 90°

このページのゴール 円周角が 90° になる場合を使って、角を求め、図形の性質を説明できる

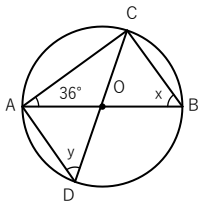
① 半円の弧に対する円周角

半円の弧に対する円周角は 90° (AB が直径ならば $\angle APB = 90^\circ$)

AB が直径のとき、 $\widehat{AB}$ (半円) に対する中心角は 180° なので、円周角 $\angle APB$ は $180 \div 2 = 90^\circ$ です。P が A、B 以外の円周上のどこにあっても同じです。



② 例 直径と三角形の内角の和、同じ弧に対する円周角



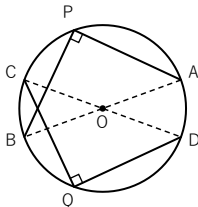
AB は直径で、 $\angle CAB = 36^\circ$ のとき、 $\angle ABC$ (x) と $\angle ADC$ (y) を求めます。

$x = 180 - 90 - 36$ ← $\angle ACB = 90^\circ$ 。△ABC の内角の和

x = 54 ← 計算する

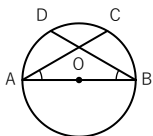
y = 54 ← $\angle ADC = \angle ABC$ (同じ $\widehat{AC}$ に対する円周角)

③ 具体的な場面 三角定規で円の中心を見つける



円の形の紙の中心を、三角定規の直角で見つけます。直角の頂点 P を円周に合わせ、2辺と円の交点を A、B とすると、AB は直径です (P をふくまない $\widehat{AB}$ に対する中心角が、 $\angle APB = 90^\circ$ の2倍の 180° になるため)。向きを変えて、もう1本の直径 CD をひきます。2本の直径の交点が円の中心 O です。

④ 図形の性質の証明



AB は直径、C、D は同じ側で $\angle CAB = \angle DBA$ のとき、 $AC = BD$ を証明する。

△ABC と △BAD において

AB は共通 …①

半円の弧に対する円周角だから $\angle ACB = \angle BDA = 90^\circ$ …②

仮定より $\angle CAB = \angle DBA$ …③

①、②、③より、直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$

よって $AC = BD$

× 点 A での角 $\angle PAB$ を 90° とする ○ 90° になるのは、円周上の点 P での角 $\angle APB$

6 弧の長さや円周角の関係は？ — 等しい弧には、等しい円周角

このページのゴール 弧と円周角の関係を使って、角や弧の長さを求め、図形の性質を説明できる

① 円周角と弧の定理

1つの円で ① 等しい弧に対する円周角は等しい ② 等しい円周角に対する弧は等しい

中1の「おうぎ形の弧の長さは中心角に比例する」と、「円周角は中心角の半分」から、1つの円の中では、円周角の大きさは弧の長さに比例します。弧の長さが2倍、3倍になれば、円周角も2倍、3倍になります。

例1 1つの円で $\widehat{AB}:\widehat{CD}=2:5$ 、 $\widehat{AB}$ に対する円周角が 18° のとき、 $\widehat{CD}$ に対する円周角 x を求めます。

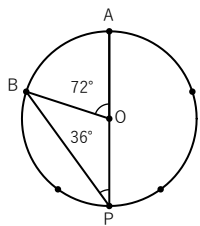
$$2:5=18:x \quad \leftarrow \text{弧の長さの比}=\text{円周角の比}$$

$$2x=90 \quad \leftarrow \text{外側の積}=\text{内側の積}$$

$$x=45 \quad \leftarrow \text{両辺を2でわる}$$

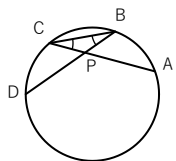
例2 1つの円で、 $\widehat{EF}$ 、 $\widehat{GH}$ に対する円周角が 30° 、 20° で、 $\widehat{EF}$ の長さが 9cm のとき、 $\widehat{GH}$ の長さ x は、 $30:20=9:x$ より $30x=20 \times 9$ で、 $20 \times 9 \div 30 = 6\text{cm}$ です。

② 円周を n 等分した点



円周を n 等分すると、弧1つ分の中心角は $360^\circ \div n$ 、円周角は $180^\circ \div n$ です。左の図は $n=5$ で、となり合う2つの点 A、B と、 $\widehat{AB}$ をのぞく円周上の点 P (分けた点でなくてもよい) です。 $360 \div 5 = 72^\circ$ 、 $72 \div 2 = 36^\circ$ ($180 \div 5 = 36^\circ$)。弧が k 個分なら、中心角も円周角も k 倍です (角の頂点をふくまないほうの弧で数えます)。

③ 図形の性質の証明



円周上に A、B、C、D がこの順にあり、 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ とする。弦 AC と BD の交点を P とするとき、 $\triangle PBC$ が二等辺三角形であることを証明する。

$\widehat{AB}=\widehat{CD}$ で、等しい弧に対する円周角は等しいから $\angle ACB = \angle DBC$

$\angle PCB = \angle ACB$ 、 $\angle PBC = \angle DBC$ だから $\angle PCB = \angle PBC$

2つの角が等しいので $\triangle PBC$ は二等辺三角形である ($PB=PC$)

× 弦の長さも弧の長さに比例するとする ○ 比例しません。円周を6等分すると、弧1つ分の弦は半径と同じ長さ、弧3つ分 (半円) の弦は直径で半径の2倍。弧は3倍でも、弦は2倍です。

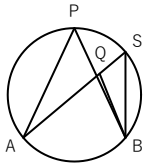
合言葉 「1つの円では、弧の長さや円周角は比例する」

7 円周角の定理の逆とは？ — 同じ角で見れば、1つの円周上

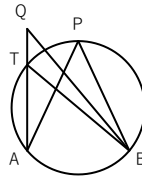
このページのゴール 円周角の定理の逆を使って、4点が1つの円周上にあるかどうかを判断できる

① なぜ成り立つ？ 円の内部・外部とくらべる

A、B、P を通る円をかき、P と同じ側にある点 Q が、円の内部・外部にあるときの $\angle AQB$ を、 $\angle APB$ とくらべます（中2の三角形の外角）。



Q が円の内部 AQ をのばして円との交点を S とすると、 $\angle AQB$ は $\triangle QSB$ の外角で $\angle AQB = \angle QSB + \angle QBS$ 、 $\angle QSB = \angle APB$ （同じ $\widehat{AB}$ ）です。たとえば $\angle APB = 50^\circ$ 、 $\angle QBS = 22^\circ$ なら $\angle AQB = 50 + 22 = 72^\circ$ で、 $\angle APB$ より大きくなります。



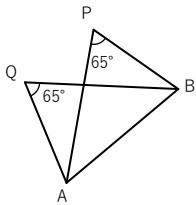
Q が円の外部 AQ と円との交点を T とすると、 $\angle ATB$ は $\triangle TQB$ の外角で $\angle ATB = \angle TQB + \angle TBQ$ 、 $\angle ATB = \angle APB$ です。たとえば $\angle APB = 50^\circ$ 、 $\angle TBQ = 10^\circ$ なら $\angle AQB = 50 - 10 = 40^\circ$ で、 $\angle APB$ より小さくなります。等しくなるのは、Q が円周上にあるときだけです。

② 円周角の定理の逆

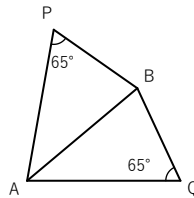
2点 P、Q が直線 AB について同じ側にあつて $\angle APB = \angle AQB$ ならば、4点 A、B、P、Q は1つの円周上にある

③ 例 いえる場合と、いえない場合

判断の手順：同じ線分の両はしから見た、等しい角の組を探す → 2つの点が、その直線について**同じ側**にあるか確かめる → 「4点は1つの円周上にある」と書く。



いえる $\angle APB = \angle AQB = 65^\circ$ で、P、Q は直線 AB について同じ側にあります。だから4点 A、B、P、Q は1つの円周上にあります。



いえない $\angle APB = \angle AQB = 65^\circ$ ですが、P、Q は直線 AB の反対側なので、4点が1つの円周上にあるとはいえません。同じ側でも角が等しくなければ、①より、1つの円周上にありませぬ。

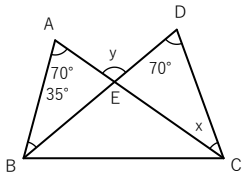
× 反対側の2点で、角が等しいから円周上とする ○ 逆が使えるのは、同じ側のときだけ

合言葉 「同じ線分を、同じ側から、同じ角で見たら、1つの円周上」

8 円周角の定理の逆は、どう使う？ — 円を思いえがく・船の位置

このページのゴール 円周上の4点を使って角を求め、見える角から位置を決められる

① 円がかかれていない図で角を求める



A、D は直線 BC について同じ側にあり、 $\angle BAC = \angle BDC = 70^\circ$ なので、4点 A、B、C、D は1つの円周上にあります。頭の中で円をかくと、 $\angle ACD$ と $\angle ABD$ は同じ $\widehat{AD}$ に対する円周角です。AC と BD の交点を E として、 $\angle AED$ (y) も求めます。

$$x = 35 \quad \leftarrow \angle ACD = \angle ABD = 35^\circ \quad (\widehat{AD} \text{ に対する円周角})$$

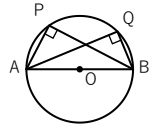
$$y = 35 + 70 \quad \leftarrow \angle AED \text{ は } \triangle ECD \text{ の外角。} \angle ECD = 35^\circ, \angle EDC = \angle BDC = 70^\circ$$

$$y = 105 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

② 90° で見る点

$\angle APB = 90^\circ$ の点 P は、AB を直径とする円の周上にある (A、B 以外)

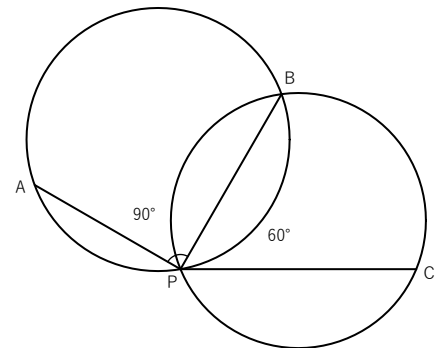
A、B、P を通る円をかくと、P をふくまない $\widehat{AB}$ に対する中心角は 90° の2倍で 180° なので、AB はその円の直径です。右の図の P、Q は、どちらも AB を直径とする円の周上にあります。



③ 船の位置を調べよう

灯台 A、B、C が地図にあります。船 P から A と B を見る角が 90° 、B と C を見る角が 60° と測れたとき、船の位置は次のように決まります。

- ① 三角定規の 90° の角の2辺が A、B を通るように動かすと、直角の頂点は AB を直径とする円の上を動く (逆)。この円は、AB の中点 M を中心にコンパスでかく
- ② 60° の角の2辺が B、C を通るように動かすと、頂点は B、C を通る円の弧の上を動く
- ③ 船 P は、2つの円の交点のうち B でないほう



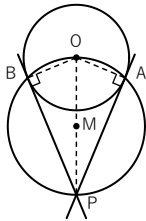
$\times 90^\circ$ で見える点を、AB の垂直二等分線の上だけと考える ○ AB を直径とする円の周上なら、どこでも 90° で見える (A、B はのぞく)

合言葉 「 90° で見る点は、直径の円の上」

9 円の外の点から、接線はどうひく？ — PO を直径とする円をかく

このページのゴール 円の外の点からの接線を作図し、接線の長さが等しいことを使える

① 接線の作図



① 線分 PO の垂直二等分線をひき、PO の中点 M をとる

② M を中心に、半径 MO の円をかく

③ 円 O との交点を A、B とする

④ 直線 PA、PB をひく（これが接線）

わけ 円 M は PO を直径とする円なので、 $\angle PAO$ は半円の弧に対する円周角で 90° 。半径 OA に、その端 A で垂直な直線は円 O の接線（中1）なので、PA は円 O の接線です。PB も同じです。

② 接線の長さ

円の外の1点からひいた2本の接線の長さは等しい（ $PA=PB$ ）

円が三角形の3辺に接するとき、三角形の1つの頂点から2つの接点までの長さは等しくなります（その頂点からひいた2本の接線になるため）。

$\triangle PAO$ と $\triangle PBO$ において

接線は接点を通る半径に垂直だから $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ …①

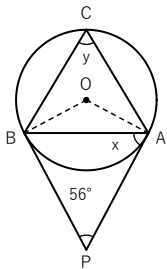
PO は共通 …②

OA=OB（半径） …③

①、②、③より、直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$

合同な図形の対応する辺は等しいから $PA=PB$

③ 例 接線の長さを使って角を求める



PA、PB は円 O の接線で、A、B は接点です。 $\angle APB = 56^\circ$ のとき、 $\angle PAB$ (x) と、円周上の点 C での $\angle ACB$ (y) を求めます。

$$x = (180 - 56) \div 2 \quad \leftarrow PA=PB \text{ なので } \triangle PAB \text{ は二等辺三角形}$$

$$x = 62 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$y = (360 - 90 - 90 - 56) \div 2 \quad \leftarrow \text{四角形 PAOB の内角の和から } \angle AOB. y \text{ はその半分}$$

$$y = 124 \div 2 \quad \leftarrow \text{計算する } (\angle AOB = 124^\circ)$$

$$y = 62 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

× 接点を、定規を当てた目目で決める ○ 作図した円 M と円 O の交点が接点

合言葉 「接線の作図は、PO を直径とする円」

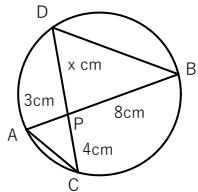
10 円の中の相似な三角形は？ — 同じ弧の円周角を探す

このページのゴール 円と直線でできる図形から相似な三角形を見つけ、線分の長さを求められる

① 求め方の手順

- ① 長さを求める線分をふくむ三角形と、長さが分かっている三角形を選ぶ
- ② 同じ弧に対する円周角・対頂角・共通な角・ 90° で、等しい角を2組見つける
- ③ 等しい角の頂点どうしを対応させて、 $\triangle \bigcirc \bigcirc \bigcirc \sim \triangle \bigcirc \bigcirc \bigcirc$ と書く
- ④ 対応する辺の比の式をつくって解く

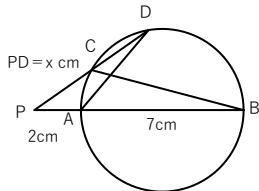
② 例1 2つの弦が円の内部で交わる形



弦 AB、CD が点 P で交わり、 $PA=3\text{cm}$ 、 $PC=4\text{cm}$ 、 $PB=8\text{cm}$ のとき、PD (x) を求めます。 $\widehat{BC}$ の円周角と対頂角が等しいので、 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ です。

$$\begin{aligned} 3 : x &= 4 : 8 && \leftarrow PA : PD = PC : PB \\ 4x &= 24 && \leftarrow \text{外側の積} = \text{内側の積} \\ \mathbf{x = 6} &&& \leftarrow \text{両辺を4でわる (6cm)} \end{aligned}$$

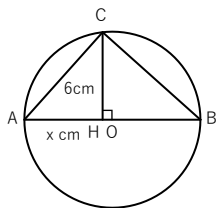
③ 例2 円の外の点から2本の直線をひいた形



点 P から2本の直線が円と A、B と C、D で交わり (A、C が近いほう)、 $PC=3\text{cm}$ のとき PD (x) を求めます。共通な角 $\angle P$ と $\widehat{AC}$ の円周角が等しいので、 $\triangle PBC \sim \triangle PDA$ です。

$$\begin{aligned} 9 : x &= 3 : 2 && \leftarrow PB : PD = PC : PA \quad (PB=2+7=9) \\ 3x &= 18 && \leftarrow \text{外側の積} = \text{内側の積} \\ \mathbf{x = 6} &&& \leftarrow \text{両辺を3でわる (6cm)} \end{aligned}$$

④ 例3 直径と、そこへの垂線



AB は直径 ($AB=9\text{cm}$)、 $CH \perp AB$ 、 $AC=6\text{cm}$ のとき AH (x) を求めます。 $\angle ACB = \angle AHC = 90^\circ$ と共通な角 $\angle A$ で $\triangle ABC \sim \triangle ACH$ 。 $\triangle CBH$ も $\triangle ABC$ と相似 (共通な角 $\angle B$ と 90°) なので $\triangle ACH \sim \triangle CBH$ もいえます。

$$\begin{aligned} 9 : 6 &= 6 : x && \leftarrow AB : AC = AC : AH \\ 9x &= 36 && \leftarrow \text{外側の積} = \text{内側の積} \\ \mathbf{x = 4} &&& \leftarrow \text{両辺を9でわる (4cm)} \end{aligned}$$

× 頂点の順を見た目でそろえる ○ 等しい角どうしを対応させる ($\triangle PAC \sim \triangle PDB$)

合言葉 「円の中の相似は、同じ弧の円周角を探す」

11 円の中の相似は、どう証明する？ ― 根拠は弧の円周角

このページのゴール 円周角の定理を根拠にして、2つの三角形が相似であることを証明できる

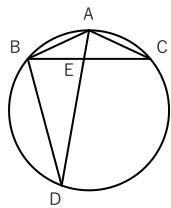
① 証明のひな型（中3⑤と同じ）

- ① 「 $\triangle OOO$ と $\triangle OOO$ において」と書く
- ② 仮定から分かることを書く
- ③ 図から分かることを書く（根拠も）
- ④ 「①、②より、2組の角がそれぞれ等しいので」と書く
- ⑤ 「 $\triangle OOO \sim \triangle OOO$ 」と結論を書く

② 根拠の書き方

使う性質	根拠の書き方
同じ弧	「 $\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから $\angle BAC = \angle BDC$ 」
直径	「半円の弧に対する円周角だから $\angle ACB = 90^\circ$ 」
等しい弧	「 $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ より、等しい弧に対する円周角は等しいから $\angle ADB = \angle ABC$ 」
対頂角・共通な角	「対頂角は等しいから $\angle APC = \angle DPB$ 」「共通な角だから $\angle BAE = \angle DAB$ 」

③ 例1 等しい弧を根拠にする証明



$\widehat{AB} = \widehat{AC}$ の円で、弦 AD と BC の交点を E とする。 $\triangle ABE \sim \triangle ADB$ を証明する。

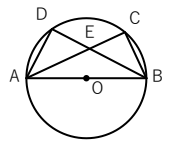
$\triangle ABE$ と $\triangle ADB$ において

共通な角だから $\angle BAE = \angle DAB$ …①

$\widehat{AB} = \widehat{AC}$ で、等しい弧に対する円周角は等しいから $\angle ABE = \angle ADB$ …②

①、②より、2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle ABE \sim \triangle ADB$

④ 例2 直径を根拠にする証明



AB を直径とする円 O の周上に C 、 D をとり、弦 AC と BD の交点を E とする。 $\triangle ADE \sim \triangle BCE$ を証明する。

$\triangle ADE$ と $\triangle BCE$ において

AB は直径だから、半円の弧に対する円周角で $\angle ADB = \angle BCA = 90^\circ$

よって $\angle ADE = \angle BCE = 90^\circ$ …①

対頂角は等しいから $\angle AED = \angle BEC$ …②

①、②より、2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle ADE \sim \triangle BCE$

- × 根拠を「円周角だから」だけにする ○ 「 $\widehat{OO}$ に対する円周角は等しいから」まで書く
- × 図に書いていない平行や等しい長さを使う ○ 仮定と、図から分かることだけを使う

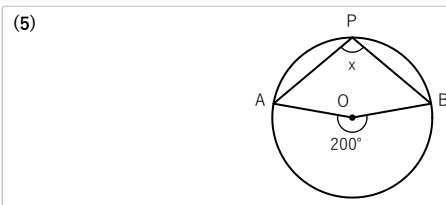
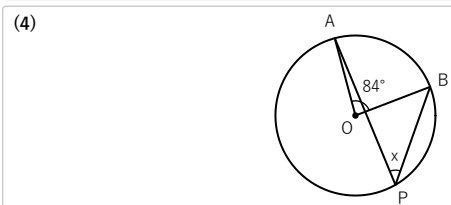
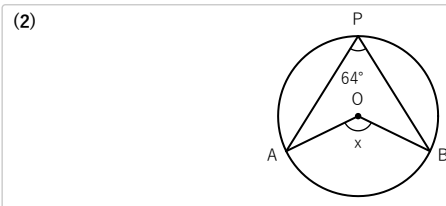
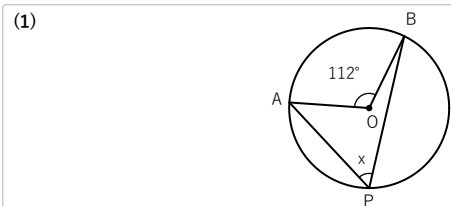
合言葉 「根拠は、どの弧に対する円周角かまで書く」

確認問題 ① 円周角と中心角・いろいろな角

答えと解き方は16～18ページ（8・9枚目の紙）にあります。途中式は、問題のわくの中にかきましょう。【 】は、わからないときに読み直すページです。

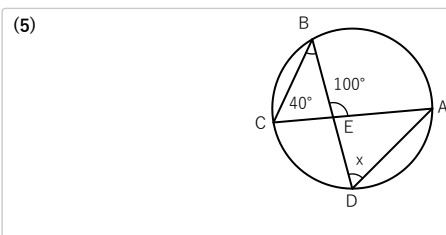
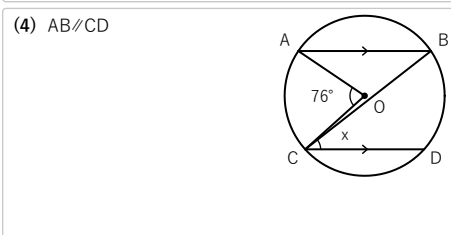
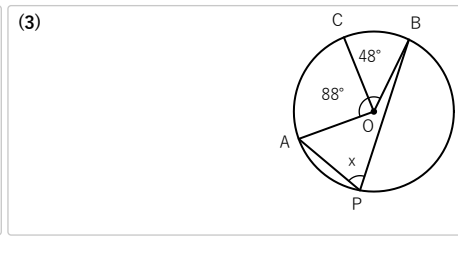
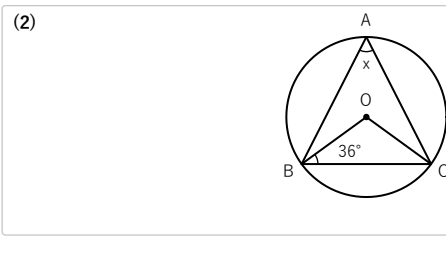
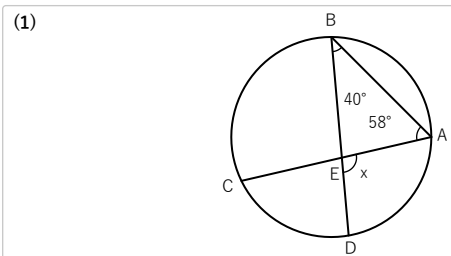
1 円周角と中心角 【2・3ページ】

次の図で、 x の値を求めなさい（(3) は x と y ）。点 O は円の中心です。（5）の $\angle AOB$ は 180° をこえるほうの角です。



2 いろいろな角 【4ページ】

次の図で、 x の値を求めなさい。点 O は円の中心です。

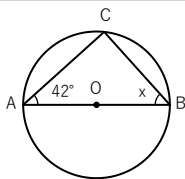


確認問題② 直径と円周角・円周角と弧

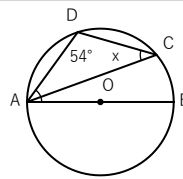
3 直径と円周角 【4・5ページ】

次の図で、AB は円 O の直径です。x の値を求めなさい。

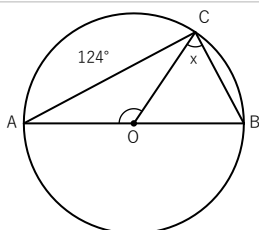
(1)



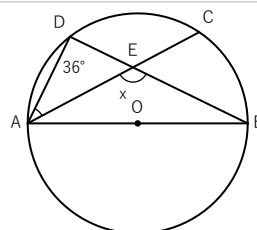
(2)



(3)

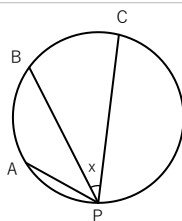


(4)



4 円周角と弧 【6ページ】

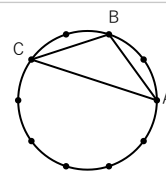
(1) 1つの円で $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ 、 $\angle APC = 68^\circ$ です。x の値を求めなさい。



(2) 1つの円で $\widehat{AB} : \widehat{CD} = 5 : 3$ です。 $\widehat{AB}$ に対する円周角が 45° のとき、 $\widehat{CD}$ に対する円周角を求めなさい。

(3) 1つの円で、 $\widehat{AB}$ に対する円周角が 15° 、 $\widehat{CD}$ に対する円周角が 40° です。 $\widehat{AB}$ の長さが 6cm のとき、 $\widehat{CD}$ の長さを求めなさい。

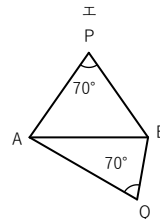
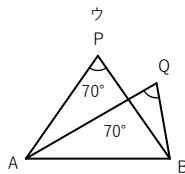
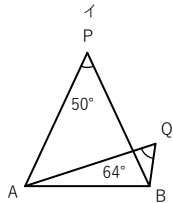
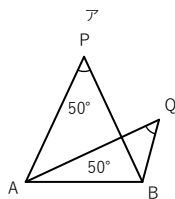
(4) 円周を10等分する点のうち、1つおきの3点 A、B、C を結びました。 $\triangle ABC$ の3つの角の大きさを求めなさい。



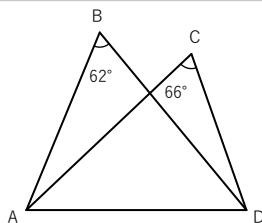
確認問題 ③ 円周角の定理の逆・逆の利用・接線

5 円周角の定理の逆 【7ページ】

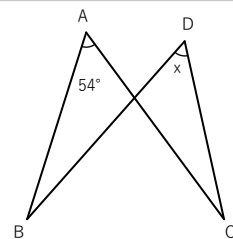
(1) 次のア～エのうち、4点 A、B、P、Q が1つの円周上にあるといえるものを、すべて選びなさい。



(2) 図で、 $\angle ABD = 62^\circ$ 、 $\angle ACD = 66^\circ$ です。4点 A、B、C、D は1つの円周上にあるといえますか。理由もいいなさい。



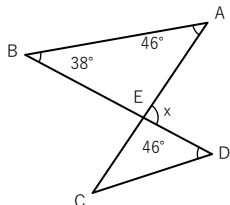
(3) 点 A、D は直線 BC について同じ側にあります。 $\angle BAC = 54^\circ$ のとき、 $\angle BDC$ (x) が何度なら、4点 A、B、C、D は1つの円周上にあるといえますか。



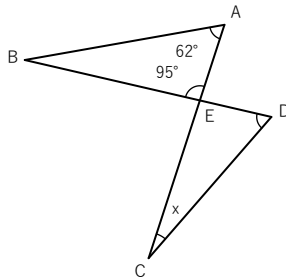
6 逆の利用 【8ページ】

(1)(2) 次の図で、 x の値を求めなさい。(円はかかれていません)

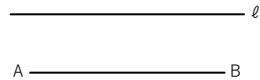
(1)



(2)

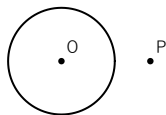


(3) 直線 ℓ 上に、 $\angle APB = 90^\circ$ となる点 P を、すべて作図しなさい。

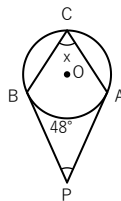


7 接線 【9ページ】

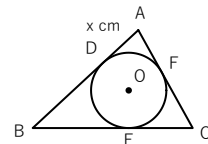
(1) 円 O の外の点 P から、円 O への接線を2本作図しなさい。作図に使った線は消さずに残します。



(2) PA、PB は円 O の接線で、A、B は接点です。 $\angle APB = 48^\circ$ のとき、 $\angle ACB$ (x) を求めなさい。



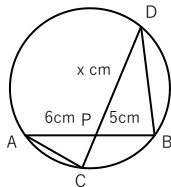
(3) 円 O は $\triangle ABC$ の3辺 AB、BC、CA に、点 D、E、F で接しています。 $AB = 9\text{cm}$ 、 $BC = 10\text{cm}$ 、 $CA = 7\text{cm}$ のとき、AD の長さ x を求めなさい (BD、CF を x の式で表して考えます)。



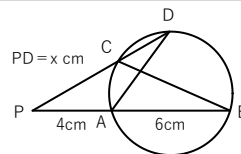
確認問題 ④ 円と相似・相似の証明

8 円と相似（長さ）【10ページ】

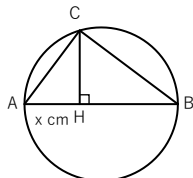
- (1) 2つの弦 AB、CD が点 P で交わり、 $PC=3\text{cm}$ です。x の値を求めなさい。



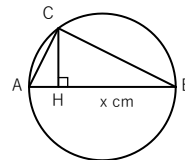
- (2) 円の外の点 P から2本の直線をひき、円との交点を P に近いほうから A、B と C、D とします。PC = 5cm のとき、PD (x) を求めなさい。



- (3) AB は円 O の直径で、 $AB=25\text{cm}$ です。 $CH \perp AB$ 、 $AC=15\text{cm}$ のとき、AH (x) を求めなさい。



- (4) AB は円 O の直径で、 $CH \perp AB$ です。AH = 3cm 、CH = 6cm のとき、HB (x) を求めなさい。



9 相似の証明【11ページ】

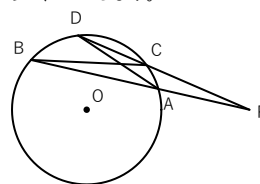
- (1) 円 O の外の点 P から2本の直線をひき、1本の直線と円の交点を P に近いほうから A、B、もう1本の直線と円の交点を P に近いほうから C、D とします。 $\triangle PBC \sim \triangle PDA$ であることを次のように証明しました。(ア) ~ (ウ) にあてはまることばや記号を書きなさい。

$\triangle PBC$ と $\triangle PDA$ で

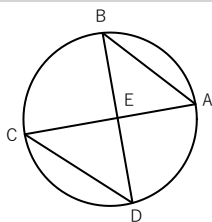
(ア) な角だから $\angle BPC = \angle DPA$ …①

∠(イ) に対する円周角は等しいから $\angle PBC = \angle PDA$ …②

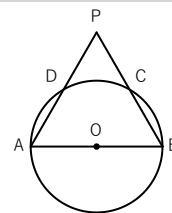
①、②より、(ウ) がそれぞれ等しいので $\triangle PBC \sim \triangle PDA$



- (2) 円周上に4点 A、B、C、D がこの順にあり、弦 AC と BD の交点を E とします。 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ であることを証明しなさい。



- (3) AB は円 O の直径で、C、D は円周上の点です。直線 AD と直線 BC が点 P で交わっています。 $\triangle PDB \sim \triangle PCA$ であることを証明しなさい。



確認問題の答えと解き方

式を1行ずつ変形しています。右の小さい字は、その行でしたことです。太字で網かけの行が答え、【】は読み直すページです。比例式 $a:b=c:d$ は、外側の積=内側の積 ($ad=bc$) を使って解きます。

1 円周角と中心角 【2・3ページ】

- (1) $x = 112 \div 2 \leftarrow x$ は $\widehat{AB}$ に対する円周角。中心角 112° の半分
 $x = 56$ $\leftarrow$ 計算する
- (2) $x = 64 \times 2 \leftarrow x$ は $\widehat{AB}$ に対する中心角。円周角 64° の2倍
 $x = 128$ $\leftarrow$ 計算する
- (3) **$x = 48$** $\leftarrow \angle ADB$ と $\angle ACB$ は同じ $\widehat{AB}$ に対する円周角
 $y = 48 \times 2 \leftarrow y$ は $\widehat{AB}$ に対する中心角 (円周角の2倍)
 $y = 96$ $\leftarrow$ 計算する
- (4) $x = 84 \div 2 \leftarrow x$ は $\widehat{AB}$ に対する円周角。中心 O が角の外にあっても、中心角 84° の半分
 $x = 42$ $\leftarrow$ 計算する
- (5) $x = 200 \div 2 \leftarrow x$ は P をふくまない長いほうの弧に対する円周角。その中心角 (180° をこえるほう) 200° の半分
 $x = 100$ $\leftarrow$ 計算する

2 いろいろな角 【4ページ】

- (1) $x = 40 + 58 \leftarrow \angle AED$ は $\triangle ABE$ の外角。 $\angle ABE = \angle ABD = 40^\circ$ 、 $\angle BAE = \angle BAC = 58^\circ$
 $x = 98$ $\leftarrow$ 計算する
- (2) $x = (180 - 36 \times 2) \div 2 \leftarrow OB = OC$ なので $\angle OCB = 36^\circ$ 。 $\angle BOC = 180^\circ - 36^\circ \times 2$ 。 x は $\widehat{BC}$ に対する円周角で、その半分
 $x = 108 \div 2 \leftarrow$ 計算する ($\angle BOC = 108^\circ$)
 $x = 54$ $\leftarrow$ 計算する

- (3) $x = (88 + 48) \div 2 \leftarrow \angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ 。 x は $\widehat{AB}$ に対する円周角で、その半分
 $x = 136 \div 2 \leftarrow$ 計算する ($\angle AOB = 136^\circ$)
 $x = 68$ $\leftarrow$ 計算する
- (4) $x = 76 \div 2 \leftarrow \angle ABC$ は $\widehat{AC}$ に対する円周角 (中心角 76° の半分)。 $AB \parallel CD$ の錯角で $x = \angle ABC$
 $x = 38$ $\leftarrow$ 計算する
- (5) $100 - 40 = 60 \leftarrow \angle AEB$ は $\triangle EBC$ の外角だから $\angle ACB = \angle AEB - \angle EBC$
 $x = 60$ $\leftarrow \angle ADB = \angle ACB$ (同じ $\widehat{AB}$ に対する円周角)

3 直径と円周角 【4・5ページ】

- (1) $x = 180 - 90 - 42 \leftarrow \angle ACB = 90^\circ$ (半円の弧に対する円周角)。 $\triangle ABC$ の内角の和
 $x = 48$ $\leftarrow$ 計算する
- (2) $180 - 90 - 54 = 36 \leftarrow \angle ABD$ ($\angle ADB = 90^\circ$)。 $\triangle ABD$ の内角の和
 $x = 36$ $\leftarrow \angle ACD = \angle ABD$ (同じ $\widehat{AD}$ に対する円周角)
- (3) $(180 - 124) \div 2 = 28 \leftarrow OA = OC$ なので $\triangle OAC$ は二等辺三角形。 $\angle OCA = (180^\circ - 124^\circ) \div 2$
 $x = 90 - 28 \leftarrow \angle ACB = 90^\circ$ (半円の弧に対する円周角)。 $\angle OCB = \angle ACB - \angle OCA$
 $x = 62$ $\leftarrow$ 計算する
- (4) $36 + 90 = 126 \leftarrow \angle CBD = \angle CAD = 36^\circ$ ($\widehat{CD}$)、 $\angle ACB = 90^\circ$ (半円の弧に対する円周角)。 $\angle AEB$ は $\triangle EBC$ の外角でその和
 $x = 126$ $\leftarrow$ 計算する

4 円周角と弧 【6ページ】

- (1) $x = 68 \div 2 \leftarrow \widehat{AB} = \widehat{BC}$ なので $\angle APB = \angle BPC$ (等しい弧に対する円周角)。
 $\angle APC$ はその2つ分
 $x = 34 \leftarrow$ 計算する
- (2) $5 : 3 = 45 : x \leftarrow \widehat{CD}$ に対する円周角を x° とする。円周角は弧の長さに比例
 $5x = 135 \leftarrow$ 外側の積 = 内側の積
 $x = 27 \leftarrow$ 両辺を5でわる
- (3) $6 : x = 15 : 40 \leftarrow \widehat{CD}$ の長さを x cm とする。弧の長さは円周角に比例
 $15x = 240 \leftarrow$ 外側の積 = 内側の積
 $x = 16 \leftarrow$ 両辺を15でわる (16cm)
- (4) 1つ分の弧の中心角は $360 \div 10 = 36^\circ$ 。それぞれの角は、その頂点をふくまない弧に対する円周角です。
 $72 \div 2 = 36 \leftarrow \angle A : \widehat{BC}$ (2つ分、中心角 72°)
 $216 \div 2 = 108 \leftarrow \angle B : \widehat{CA}$ (B をふくまない側の6つ分、中心角 216°)
 $72 \div 2 = 36 \leftarrow \angle C : \widehat{AB}$ (2つ分、中心角 72°)
 $36 + 108 + 36 = 180 \leftarrow$ 内角の和の確かめ
答え $\angle A = 36^\circ$ 、 $\angle B = 108^\circ$ 、 $\angle C = 36^\circ$

5 円周角の定理の逆 【7ページ】

- (1) ア：P、Q は直線 AB について同じ側で $\angle APB = \angle AQB = 50^\circ$ なので、1つの円周上にある。イ：同じ側だが 50° と 64° で、等しくない。ウ：同じ側で 70° ずつなので、1つの円周上にある。エ： 70° ずつだが、直線 AB について反対側にある。
答え ア、ウ

- (2) もし4点が1つの円周上にあれば、 $\angle ABD$ と $\angle ACD$ は同じ $\widehat{AD}$ に対する円周角なので、等しくなるはずですが。しかし 62° と 66° で等しくないため、4点は1つの円周上にあるとはいえません。

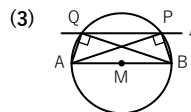
答え いえない

- (3) A、D は直線 BC について同じ側にあるので、 $\angle BDC = \angle BAC$ のとき、4点は1つの円周上にあります。

$x = 54 \leftarrow \angle BDC = \angle BAC = 54^\circ$ のとき

6 逆の利用 【8ページ】

- (1) A、D は直線 BC について同じ側で $\angle BAC = \angle BDC$ なので、4点 A、B、C、D は1つの円周上にあります。
 $x = 38 + 46 \leftarrow \angle ACD = \angle ABD = 38^\circ$ ($\widehat{AD}$)。 $\angle AED$ は $\triangle ECD$ の外角で、
 $\angle EDC = \angle BDC = 46^\circ$
 $x = 84 \leftarrow$ 計算する
- (2) A、D は直線 BC について同じ側で $\angle BAC = \angle BDC$ なので、4点 A、B、C、D は1つの円周上にあります。
 $180 - 62 - 95 = 23 \leftarrow \triangle ABE$ の内角の和で $\angle ABE$
 $x = 23 \leftarrow \angle ACD = \angle ABD$ (同じ $\widehat{AD}$ に対する円周角)



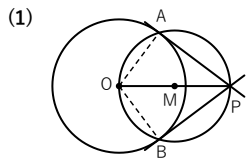
- ① 線分 AB の垂直二等分線をかき、AB の中点 M を求める

- ② M を中心に、半径 MA の円 (AB を直径とする円) をかく

- ③ この円と直線 l との交点が、求める点 (図の P と Q の2つ)

AB を直径とする円の周上の点は、 $\angle APB = 90^\circ$ になります (8ページ)。

7 接線 【9ページ】



- (1) ① 線分 OP の垂直二等分線をかき、OP の中点 M を求める
 ② M を中心に、半径 MO の円をかき
 ③ 円 O との交点を A、B とする
 ④ 直線 PA、PB をひく

円 M は OP を直径とする円なので、 $\angle OAP = 90^\circ$ （半円の弧に対する円周角）。 $OA \perp PA$ なので、PA は円 O の接線です（PB も同じ）。

- (2) $\leftarrow OA, OB$ をひく。 $OA \perp PA, OB \perp PB$ 。四角形 PAOB の内角の和から $\angle AOB$ 。x は $\widehat{AB}$ に対する円周角で、その半分
 $x = (360 - 90 - 90 - 48) \div 2$
 $x = 132 \div 2$
 $x = 66$ $\leftarrow$ 計算する

- (3) 接線の長さは等しいので、 $AD = AF = x, BD = BE = 9 - x, CE = CF = 7 - x$ と表せます。
 $(9 - x) + (7 - x) = 10 \leftarrow BE + CE = BC$
 $16 - 2x = 10 \leftarrow$ かっこをははずす
 $2x = 6 \leftarrow 16$ を移項する
 $x = 3$ $\leftarrow$ 両辺を2でわる（3cm）

8 円と相似（長さ） 【10ページ】

- (1) $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ （ $\widehat{BC}$ に対する円周角と、対頂角）なので
 $6 : x = 3 : 5 \leftarrow PA : PD = PC : PB$
 $3x = 30 \leftarrow$ 外側の積 = 内側の積
 $x = 10 \leftarrow$ 両辺を3でわる（10cm）

- (2) $\triangle PBC \sim \triangle PDA$ （共通な角 $\angle P$ と、 $\widehat{AC}$ に対する円周角 $\angle PBC = \angle PDA$ ）です。 $PB = 4 + 6 = 10$ 。

$$10 : x = 5 : 4 \leftarrow PB : PD = PC : PA$$

$$5x = 40 \leftarrow \text{外側の積} = \text{内側の積}$$

$$x = 8 \leftarrow \text{両辺を5でわる（8cm）}$$

- (3) $\triangle ABC \sim \triangle ACH$ （ $\angle ACB = 90^\circ$ （半円の弧に対する円周角） $= \angle AHC$ 、共通な角 $\angle A$ ）なので

$$25 : 15 = 15 : x \leftarrow AB : AC = AC : AH$$

$$25x = 225 \leftarrow \text{外側の積} = \text{内側の積}$$

$$x = 9 \leftarrow \text{両辺を25でわる（9cm）}$$

- (4) $\angle ACB = 90^\circ$ （半円の弧に対する円周角）なので $\angle ACH + \angle BCH = 90^\circ$ 。 $\triangle ACH$ で $\angle CAH + \angle ACH = 90^\circ$ だから $\angle CAH = \angle BCH$ 。 $\angle AHC = \angle CHB = 90^\circ$ と合わせて $\triangle ACH \sim \triangle CBH$ です。

$$3 : 6 = 6 : x \leftarrow AH : CH = CH : HB$$

$$3x = 36 \leftarrow \text{外側の積} = \text{内側の積}$$

$$x = 12 \leftarrow \text{両辺を3でわる（12cm）}$$

9 相似の証明 【11ページ】

- (1) ア 共通 イ AC ウ 2組の角

$\angle PBC (= \angle ABC)$ と $\angle PDA (= \angle CDA)$ は、どちらも $\widehat{AC}$ に対する円周角です。

- (2) $\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ において

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから $\angle BAE = \angle CDE$ …①

対頂角は等しいから $\angle AEB = \angle DEC$ …②

①、②より、2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE \sim \triangle DCE$

- (3) $\triangle PDB$ と $\triangle PCA$ において

AB は直径だから、半円の弧に対する円周角で $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$

$\angle PDB = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ$ 、 $\angle PCA = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$ だから

$\angle PDB = \angle PCA$ …①

共通な角だから $\angle DPB = \angle CPA$ …②

①、②より、2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle PDB \sim \triangle PCA$