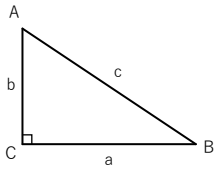


2 三平方の定理は、なぜ成り立つ？ — 面積を2通りに表す

このページのゴール 三平方の定理を言い、それが面積を使って証明できることを説明できる

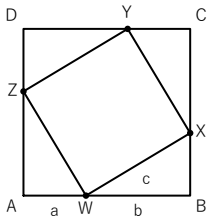
① 三平方の定理



三平方の定理 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを a 、 b 、斜辺の長さを c とすると $a^2 + b^2 = c^2$

斜辺は、直角の向かい側の辺で、いちばん長い辺です（ピタゴラスの定理ともいいます）。

② 面積を2通りに表して証明する



1辺 $a+b$ の正方形の中に、直角をはさむ辺が a 、 b 、斜辺が c の合同な直角三角形を4つ、図のように並べる

内側の四角形 $WXYZ$ は、4辺がどれも c

1つの角、たとえば $\angle ZWX$ は $180^\circ - (\text{直角三角形の2つの鋭角の和}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

よって $WXYZ$ は1辺 c の正方形

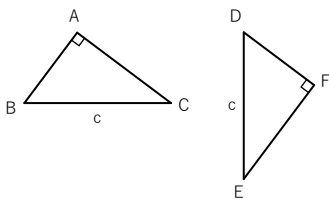
大きい正方形の面積を2通りに表すと $(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$ 。左辺を展開（中3①）して整理すると

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad \leftarrow (a+b)^2 \text{ を展開する}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \leftarrow \text{両辺から } 2ab \text{ をひく}$$

1ページの三角形（直角をはさむ2辺が1、2）でも、 $1^2 + 2^2 = 5$ で、正方形 R の面積5と同じです。

③ 向きが変わっても、斜辺は直角の向かい側



左は $\angle A = 90^\circ$ なので、斜辺は向かい側の BC 。右は $\angle F = 90^\circ$ なので、斜辺は向かい側の DE です。

× 斜辺でない辺を c にして、 $a^2 + b^2 = c^2$ を立てる ○ c は直角の向かい側の辺（いちばん長い辺）

合言葉 「直角の向かいが、斜辺 c 」

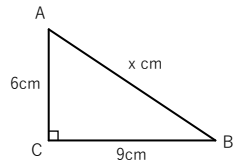
3 直角三角形の辺の長さは、どう求める？ — 斜辺を見つけて、2乗の式

このページのゴール 三平方の定理を使って、直角三角形の斜辺や、斜辺以外の辺の長さを求められる

① 求め方の手順

- ① 斜辺（直角の向かい側の辺）を決める
- ② 求める辺を x として、 $a^2 + b^2 = c^2$ に入れる
- ③ $x^2 = \dots$ を解く（長さなので $x > 0$ ）
- ④ $\sqrt{\quad}$ の中を小さい自然数に（ $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ ）

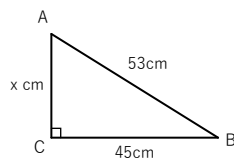
② 例



例1 斜辺を求める 2辺が6cm、9cm のとき（長方形の対角線も同じ形）。

$$x^2 = 6^2 + 9^2 \leftarrow \text{三平方の定理（斜辺は } x \text{）}$$

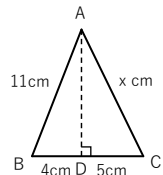
$$x = 3\sqrt{13} \leftarrow x^2 = 117, x > 0 \text{ だから。}\sqrt{117} = \sqrt{9 \times 13}$$



例2 斜辺以外を求める 斜辺53cm、1辺45cm のとき。足し算でなくひき算。

$$x^2 + 45^2 = 53^2 \leftarrow \text{三平方の定理（斜辺は } 53 \text{）}$$

$$x = 28 \leftarrow x^2 = 2809 - 2025 = 784, x > 0 \text{ だから}$$



例3 2つの直角三角形 $AD \perp BC$ 。共通な辺AD（ y cm）を先に求めます。

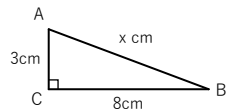
$$y^2 + 4^2 = 11^2 \leftarrow \triangle ABD \text{ で、斜辺は } AB$$

$$y = \sqrt{105} \leftarrow y^2 = 105, y > 0 \text{ だから}$$

$$x^2 = 105 + 5^2 \leftarrow \triangle ADC \text{ で、斜辺は } AC \text{（} AD^2 = 105 \text{）}$$

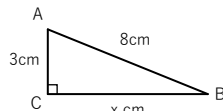
$$x = \sqrt{130} \leftarrow x^2 = 130, x > 0 \text{ だから}$$

例4 2辺だけ分かっているとき 直角三角形の2辺が3cm、8cm なら、残りの辺 x cm は2通りあります。



$$x^2 = 3^2 + 8^2 \leftarrow \text{残りの辺が斜辺のとき}$$

$$x = \sqrt{73} \leftarrow x^2 = 73, x > 0 \text{ だから}$$



$$x^2 + 3^2 = 8^2 \leftarrow 8\text{cm の辺が斜辺のとき}$$

$$x = \sqrt{55} \leftarrow x^2 = 55, x > 0 \text{ だから}$$

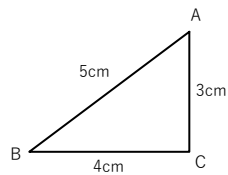
× 斜辺以外を求めるのに、 $x^2 = a^2 + c^2$ と足す ○ $x^2 = c^2 - a^2$ （斜辺の2乗から引く）

合言葉 「斜辺の2乗＝ほかの2辺の2乗の和」

4 三平方の定理の逆とは？ — $a^2 + b^2 = c^2$ なら直角三角形

このページのゴール 3辺の長さから、直角三角形かどうか・どの角が直角かを判断できる

① 3辺が 3cm、4cm、5cm の三角形



3辺が 3cm、4cm、5cm の三角形をかくと、直角三角形になります。 $3^2 + 4^2 = 25$ 、 $5^2 = 25$ で等しくなっています。この組は、角度を測らずに直角をつくる方法として、地面に直角をとるときなどに使われてきました。

② 三平方の定理の逆

三平方の定理の逆 3辺の長さが a 、 b 、 c の三角形で、 $a^2 + b^2 = c^2$ ならば、その三角形は、長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である

三平方の定理は「直角三角形ならば $a^2 + b^2 = c^2$ 」。ならばの前とあとを入れかえた「逆」も正しいので、3辺の長さだけで判断できます。

③ 判断の手順

- ① いちばん長い辺を c にする ($\sqrt{\quad}$ をふくむ辺は2乗してくらべる)
- ② $a^2 + b^2$ と c^2 を、別々に計算する
- ③ 等しければ直角三角形 (直角は c の向かい側の角)、ちがえば直角三角形ではない

④ 例

例1 3辺の組から判断する 3つ目の組は、いちばん長い辺 (3cm) が最初に書かれています。書かれた順ではなく、長さでくらべます。

3辺の組	いちばん長い辺 c	$a^2 + b^2$	c^2	判断
24cm、32cm、40cm	40cm	$24^2 + 32^2 = 1600$	$40^2 = 1600$	直角三角形
9cm、10cm、13cm	13cm	$9^2 + 10^2 = 181$	$13^2 = 169$	直角三角形ではない
3cm、 $\sqrt{7}$ cm、 $\sqrt{2}$ cm	3cm	$(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2 = 9$	$3^2 = 9$	直角三角形

例2 どの角が直角か $\triangle ABC$ の3辺が $AB = 35$ cm、 $BC = 37$ cm、 $CA = 12$ cm のとき、いちばん長い辺は BC です。 $12^2 + 35^2 = 1369$ 、 $37^2 = 1369$ で等しいので、 BC を斜辺とする直角三角形で、直角は BC の向かい側の頂点、 $\angle A = 90^\circ$ です。

× いちばん長くない辺を c にする ○ c はいちばん長い辺 (16、30、34 なら 34)

合言葉 「いちばん長い辺を c にして、2乗でくらべる」

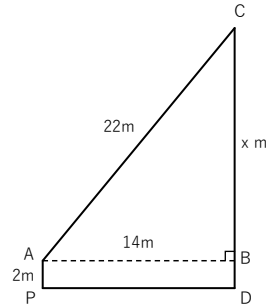
5 身のまわりの長さは、どう求める？ — 直角三角形を取り出す

このページのゴール 場面から直角三角形を見つけ、三平方の定理で長さを求められる

① 場面を直角三角形にする手順

- ① 場面を横から見た図にかく
- ② 直角の所を見つけ、直角三角形を取り出す
- ③ 分かっている長さを書きこみ、求める長さを x にする
- ④ 三平方の定理で x を求め、最後に場面にもどす（足す・引く・単位）

② 例



例1 はしご車 はしごを 22m のばし、建物から 14m はなれた地面に、付け根が地面から 2m の高さになるように止めます。はしごの先の、地面からの高さを求めます。

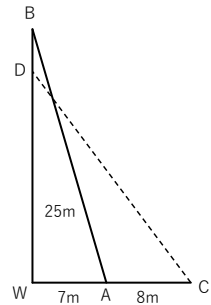
$$x^2 + 14^2 = 22^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理（直角三角形 ABC で、斜辺は AC）}$$

$$x^2 = 484 - 196 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x^2 = 288 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x = 12\sqrt{2} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{288} = \sqrt{144 \times 2}$$

x は付け根の高さから先までの高さなので、地面からの高さは、付け根の高さ 2m を足して、 $(12\sqrt{2} + 2)$ m です。



例2 はしごをずらす 長さ 25m のはしごを、下のはしがかべから 7m はなれるように立てかけています。下のはしをかべから 8m 遠ざける（点線）と、上のはしは何 m 下がるでしょうか。

$$x^2 + 7^2 = 25^2 \quad \leftarrow \text{ずらす前（斜辺ははしごの 25）}$$

$$x^2 = 576 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = 24 \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから（高さ 24m）}$$

$$y^2 + 15^2 = 25^2 \quad \leftarrow \text{ずらした後（かべから 7+8=15m）}$$

$$y^2 = 400 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$y = 20 \quad \leftarrow y > 0 \text{ だから（高さ 20m）}$$

下がった長さは $24 - 20 = 4$ m です。

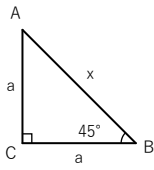
× はしご車で、直角三角形の高さ x をそのまま、地面からの高さの答えにする ○ 付け根の高さを足して、場面にもどす

合言葉 「場面から、直角三角形を取り出す」

6 特別な直角三角形とは？ — 3辺の比が決まっている

このページのゴール 特別な直角三角形の3辺の比を使って、辺の長さを求められる

① 直角二等辺三角形（45° ・ 45° ・ 90° ）



正方形を対角線で半分にした形です。直角をはさむ辺が a、a のとき、三平方の定理で斜辺 x は

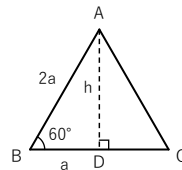
$$a^2 + a^2 = x^2$$

$$2a^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{2}a$$

直角二等辺三角形の3辺の比は $1 : 1 : \sqrt{2}$

② 30° ・ 60° ・ 90° の直角三角形



正三角形を、頂点から底辺への垂線で半分にした形です。1辺 2a のとき、三平方の定理で高さ h は

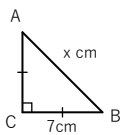
$$h^2 + a^2 = (2a)^2$$

$$h^2 = 3a^2$$

$$h = \sqrt{3}a$$

30° ・ 60° ・ 90° の直角三角形の3辺の比は $1 : \sqrt{3} : 2$ (30° の向かいが 1、60° の向かいが $\sqrt{3}$ 、斜辺が 2)

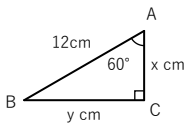
③ 比を使って長さを求める（比例式は、外側の積＝内側の積で解く）



例1 45° で、等しい辺から斜辺

$$1 : \sqrt{2} = 7 : x$$

$$x = 7\sqrt{2}$$



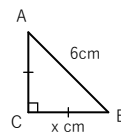
例3 30° ・ 60° で、斜辺から残りの2辺

$$1 : 2 = x : 12$$

$$x = 6$$

$$1 : \sqrt{3} = 6 : y$$

$$y = 6\sqrt{3}$$

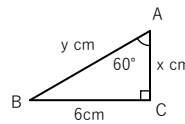


例2 45° で、斜辺から等しい辺（正方形の対角線から1辺も同じ。分母は有理化する）

$$1 : \sqrt{2} = x : 6$$

$$\sqrt{2}x = 6$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$



例4 30° ・ 60° で、 $\sqrt{3}$ にあたる辺から

$$1 : \sqrt{3} = x : 6$$

$$\sqrt{3}x = 6$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$y = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

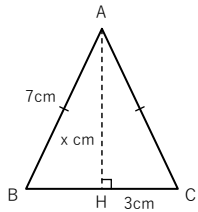
× 斜辺を $\sqrt{3}$ にあたる辺とする ○ 斜辺がいちばん長い ($2 > \sqrt{3} \approx 1.73$)

合言葉 「比は図の辺に書く。斜辺がいちばん長い」

7 三角形の高さと面積は？ — 垂線で直角三角形に分ける

このページのゴール 三角形の高さと面積や、三角定規を組み合わせた図の長さを求められる

① 二等辺三角形の高さと面積



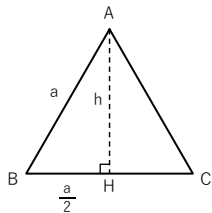
例1 頂点から底辺への垂線は、底辺を2等分します（中2）。 $AB = AC = 7\text{ cm}$ 、 $BC = 6\text{ cm}$ のとき、 $HC = 3\text{ cm}$ です。

$$x^2 + 3^2 = 7^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理（}\triangle AHC \text{ で、斜辺は } AC\text{）}$$

$$x = 2\sqrt{10} \quad \leftarrow x^2 = 40, x > 0 \text{ だから}$$

$$\text{面積は } \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10} \text{ cm}^2 \text{ です。}$$

② 正三角形の面積の式



1辺 a の正三角形 ABC で、頂点 A から BC に垂線 AH をひく

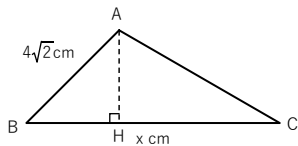
$\triangle ABH$ は、 $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle AHB = 90^\circ$ の直角三角形なので、3辺の比は $1 : \sqrt{3} : 2$

$$BH = \frac{a}{2} \text{ だから } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\text{面積は } \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

例2 1辺 12 cm の正三角形の面積は、 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ です（高さ $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ から求められます）。

③ 三角定規を2枚組み合わせた図



例3 $\angle B = 45^\circ$ 、 $\angle C = 30^\circ$ の $\triangle ABC$ で、 A から BC に垂線 AH をひきます。 $AB = 4\sqrt{2}\text{ cm}$ のとき、 $BC = x\text{ cm}$ を求めます。比を2回使います。

$$1 : \sqrt{2} = y : 4\sqrt{2} \quad \leftarrow \triangle ABH \text{ は } 45^\circ \text{ の三角形。} BH = AH = y$$

$$y = 4 \quad \leftarrow \text{外側の積} = \text{内側の積}$$

$$1 : \sqrt{3} = 4 : z \quad \leftarrow \triangle AHC \text{ は } 30^\circ \cdot 60^\circ \text{。} AH \text{ が短い辺、} HC = z$$

$$z = 4\sqrt{3} \quad \leftarrow \text{外側の積} = \text{内側の積}$$

$$x = 4 + 4\sqrt{3} \quad \leftarrow BC = BH + HC$$

× 二等辺三角形で、底辺 6 cm をそのまま使って $x^2 + 6^2 = 7^2$ とする ○ 底辺を半分にして $x^2 + 3^2 = 7^2$

合言葉 「頂点から垂線、底辺は半分」

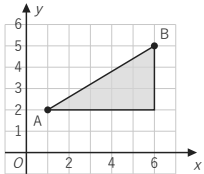
8 座標平面の2点の距離は？ — 横の差と縦の差で直角三角形

このページのゴール 座標平面上の2点間の距離を、三平方の定理で求められる

① 2点を結ぶ線分を斜辺にする

2点を結ぶ線分を斜辺とし、横と縦が座標軸に平行な直角三角形をつくります。横の長さは x 座標の差、縦の長さは y 座標の差です。差は、大きいほうから小さいほうを引きます。

② 例



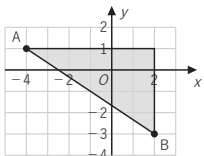
例1 2点の距離 $A(1, 2)$ 、 $B(6, 5)$ の距離 $AB=x$ を求めます。

$$x^2 = (6-1)^2 + (5-2)^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 (横の差}^2 + \text{縦の差}^2)$$

$$x^2 = 25 + 9 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x^2 = 34 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x = \sqrt{34} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから}$$

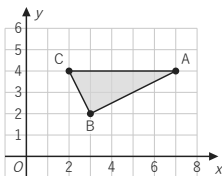


例2 負の座標をふくむ2点 $A(-4, 1)$ 、 $B(2, -3)$ の距離 $AB=x$ を求めます。横の差は $2 - (-4) = 6$ 、縦の差は $1 - (-3) = 4$ です。

$$x^2 = 6^2 + 4^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 (横の差}^2 + \text{縦の差}^2)$$

$$x^2 = 52 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x = 2\sqrt{13} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13}$$



例3 3点でできる三角形 $A(7, 4)$ 、 $B(3, 2)$ 、 $C(2, 4)$ を頂点とする $\triangle ABC$ は、どんな三角形でしょうか。3辺の長さを2乗で求めます (2点の距離と同じ)。

$$AB^2 = (7-3)^2 + (4-2)^2 = 20, \quad BC^2 = (3-2)^2 + (2-4)^2 = 5, \quad CA^2 = (7-2)^2 + (4-4)^2 = 25$$

3辺の長さがすべてちがうので、二等辺三角形ではありません。いちばん長い辺は CA で、 $20+5=25$ と等しいので、三平方の定理の逆から、 CA を斜辺とする直角三角形です。直角は CA の向かい側なので $\angle B = 90^\circ$ です。

× 負の座標の差を、符号を落として $3-2=1$ とする ○ $3 - (-2) = 5$ (大きいほうから小さいほうを引く)

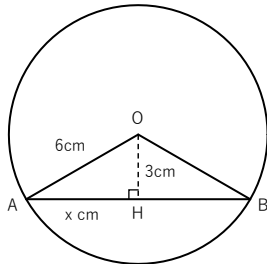
合言葉 「横の差・縦の差で、直角三角形」

9 円の弦や接線の長さは？ — 半径をひいて直角三角形

このページのゴール 円の弦の長さ、中心から弦までの距離、円の外の点からひいた接線の長さを求められる

① 弦の長さと、中心から弦までの距離

中心 O から弦 AB に垂線 OH をひくと、H は弦 AB の中点です（△OAB は OA=OB の二等辺三角形）。△OAH で OA は半径なので、弦の長さは AB=2AH で求めます。



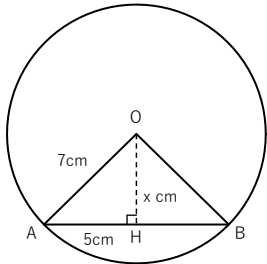
例1 弦の長さ 半径 6cm の円で、中心から弦までの距離が 3cm のとき、弦 AB の長さを求めます。

$$x^2 + 3^2 = 6^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理（}\triangle OAH \text{ で、} x \text{ は AH）}$$

$$x^2 = 27 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = 3\sqrt{3} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3}$$

弦 AB は AH の2倍で、 $3\sqrt{3} \times 2 = 6\sqrt{3}$ cm です。



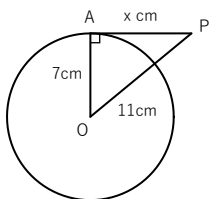
例2 中心から弦までの距離 半径 7cm の円で、弦 AB が 10cm のとき、中心から弦までの距離 OH=x cm を求めます。AH は弦の半分なので 5cm です。

$$x^2 + 5^2 = 7^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理（}\triangle OAH \text{ で、} x \text{ は OH）}$$

$$x^2 = 24 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = 2\sqrt{6} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6}$$

② 円の外の点からの接線の長さ



例3 接線の長さ 接線は接点を通る半径に垂直です（中1）。半径 OA=7cm、OP=11cm のとき、接線の長さ PA=x cm は

$$x^2 + 7^2 = 11^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理（}\triangle OAP \text{ で、斜辺は OP）}$$

$$x^2 = 72 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = 6\sqrt{2} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$

円の外の点 P からひいた2本の接線の長さは等しい（中3⑥）ので、もう1本の接線の長さも同じです。

× 弦の長さを、AH のままで答える ○ 弦 AB は AH の2倍（AB=2AH）

合言葉 「円の中の長さは、半径をひいて直角三角形」

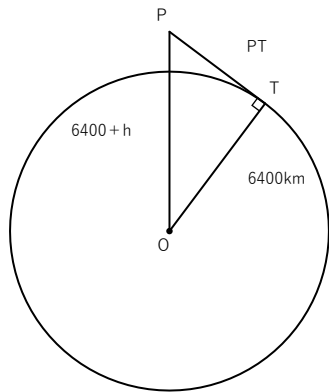
10

山の上から、どれくらい遠くまで見える？ — 地球の円と接線

このページのゴール

身のまわりの問題を円と接線の図に表し、三平方の定理で求められる

① 地球の切り口の円と接線



山の高さは大きくかいています

地球を球とみて、山頂 P と地球の中心 O を通る切り口の円を考えます。P から見えるいちばん遠い所 T は、P から円にひいた**接線の接点**です（その先は地球のかげになります）。接線は接点を通る半径に垂直なので、 $\angle OTP = 90^\circ$ です。

地球の半径を 6400km、山の高さを h km とすると、 $OT = 6400$ 、 $OP = 6400 + h$ です。 $\triangle OTP$ で三平方の定理を使うと、 PT^2 を次のように求められます。

$$PT^2 = (6400 + h)^2 - 6400^2$$

← 三平方の定理（斜辺は OP）

$$PT^2 = (6400 + h + 6400)(6400 + h - 6400)$$

← $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ で因数分解（中3①）

$$PT^2 = (12800 + h)h$$

← 計算する

② 山の高さと、見える距離

山の高さ h	$PT^2 = (12800 + h) \times h$	PT（見える距離）
0.5km（500m）	$12800.5 \times 0.5 = 6400.25$	$\sqrt{6400.25}$ は $\sqrt{6400} = 80$ とほとんど同じなので、約80km
2km（4倍）	$12802 \times 2 = 25604$	$\sqrt{25604}$ は $\sqrt{25600} = 160$ とほとんど同じなので、約160km
4km（富士山くらい）	$12804 \times 4 = 51216$	$\sqrt{51216}$ は $\sqrt{51200} = 160\sqrt{2}$ とほとんど同じなので、約226km

山の高さが 4倍（0.5km → 2km）になっても、見える距離は約2倍（80km → 160km）にしかありません。h が地球の半径にくらべて小さいので、 PT^2 の $(12800 + h)$ はほとんど 12800 のままだからです。 PT^2 に近い整数の2乗は、 $60^2 = 3600$ 、 $70^2 = 4900$ のように見当をつけてさがします。

$\times (6400 + h)^2$ を $6400^2 + h^2$ とする $\bigcirc (a + b)^2$ は $a^2 + 2ab + b^2$ 。2ab が落ちないように、因数分解で計算する

合言葉 「接線と半径で直角、2乗の差は因数分解」

かてきょノート（katekyo-note.com）

10

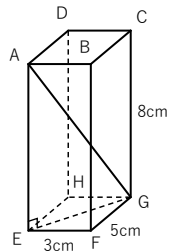
11 直方体の対角線の長さは？ — 直角三角形を2回

このページのゴール 直方体・立方体の対角線の長さを、平面の直角三角形を取り出して求められる

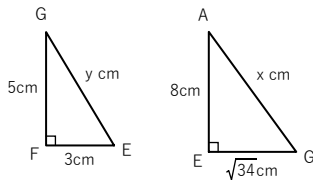
① 空間の長さを求める手順

- ① 求める長さをふくむ直角三角形をさがす
- ② その三角形を、平面の図にかき出す
- ③ 三平方の定理を使う（足りない辺は、もう1つの直角三角形で先に求める）

② 例



例1 直方体の対角線 3cm、5cm、8cmの直方体の対角線 AG を求めます。先に底面の対角線 EG を求め、次に $\triangle AEG$ ($\angle AEG = 90^\circ$) で AG を求めます。下の2つの図は、取り出した $\triangle EFG$ と $\triangle AEG$ です。



$$y^2 = 3^2 + 5^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理} (\triangle EFG \text{ で、斜辺は } EG)$$

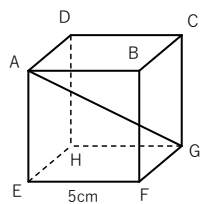
$$y = \sqrt{34} \quad \leftarrow y > 0 \text{ だから}$$

$$x^2 = 34 + 8^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理} (\triangle AEG \text{ で、斜辺は } AG。EG^2 = 34)$$

$$x^2 = 98 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x = 7\sqrt{2} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2}$$

縦 a 、横 b 、高さ c の直方体の対角線の長さは $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



例2 立方体の対角線 1辺 5cm の立方体の対角線は、 $\sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$ cm です。逆に、対角線が 12cm の立方体の1辺 x cm は

$$x^2 + x^2 + x^2 = 12^2 \quad \leftarrow \text{縦・横・高さがすべて } x \text{ の対角線}$$

$$3x^2 = 144 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x^2 = 48 \quad \leftarrow \text{両辺を3でわる}$$

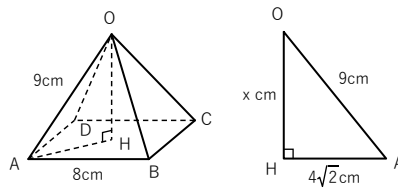
$$x = 4\sqrt{3} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$$

× 対角線 AG を、底面の2辺だけで $\sqrt{a^2 + b^2}$ とする ○ 高さ c も入れて $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

合言葉 「空間の長さは、平面の直角三角形にかき出す」

12 角すい・円すいの高さは？ — 頂点から底面への垂線で直角三角形

このページのゴール 正四角すい・円すいの高さを求めて体積を求め、立体の中の高さを見つけられる

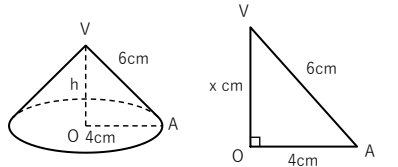


例1 正四角すい 底面の1辺 8cm、OA=9cm のとき、底面の対角線の半分 AH は $8\sqrt{2} \div 2 = 4\sqrt{2}$ cm です。
△OAH (∠OHA=90°) で高さ OH を求めます。

$$x^2 + (4\sqrt{2})^2 = 9^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 (△OAH で、x は OH)}$$

$$x = 7 \quad \leftarrow x^2 = 81 - 32 = 49, x > 0 \text{ だから}$$

$$\text{体積は } \frac{1}{3} \times 8 \times 8 \times 7 = \frac{448}{3} \text{ cm}^3 \text{ です。}$$

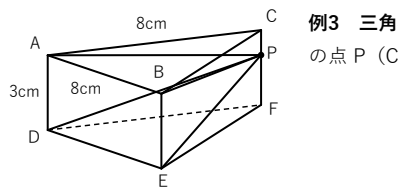


例2 円すい 底面の半径 4cm、母線 6cm のとき、半径と母線で直角三角形 OAV をつくり、高さを求めます。

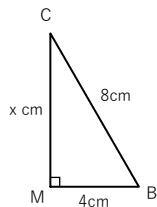
$$x^2 + 4^2 = 6^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 (△OAV で、x は OV)}$$

$$x = 2\sqrt{5} \quad \leftarrow x^2 = 20, x > 0 \text{ だから}$$

$$\text{体積は } \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 2\sqrt{5} = \frac{32\sqrt{5}}{3} \pi \text{ cm}^3 \text{ です。}$$



例3 三角柱の中の四角すい 底面が1辺 8cm の正三角形 ABC で、AD が底面に垂直な、AD=3cm の三角柱です。辺 CF 上の点 P (C、F とは重ならない) を頂点とする四角すい P-ADEB の体積を求めます。



C から AB に垂線 CM をひく (M は AB の中点)。CM ⊥ AB

AD は底面 ABC に垂直なので、底面の上の直線 CM にも垂直。CM ⊥ AD。よって CM は面 ADEB に垂直

CF は AD に平行で、面 ADEB に平行。P が CF のどこにあって、P から面 ADEB までの高さは CM に等しい

$$x^2 + 4^2 = 8^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 (△CMB で、斜辺は BC。x は CM)}$$

$$x = 4\sqrt{3} \quad \leftarrow x^2 = 48, x > 0 \text{ だから}$$

$$\text{体積は } \frac{1}{3} \times (8 \times 3) \times 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^3 \text{ です (四角すいの底面 ADEB の面積 } 8 \times 3 \text{、高さ CM)。$$

× 正四角すいの高さに、底面の1辺の半分を使って $x^2 + 4^2 = 9^2$ とする ○ 対角線の半分 AH を使う ($8\sqrt{2} \div 2 = 4\sqrt{2}$)

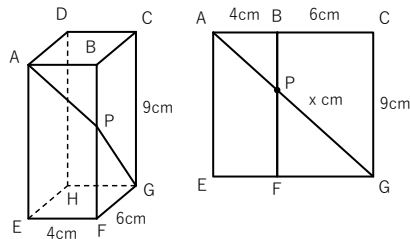
合言葉 「高さは、頂点から底面への垂線」

13 立体の表面を通る最短の長さは？ — 展開図の上で線分にする

このページのゴール 立体の表面にかけたひもの最短の長さを、展開図をかいて求められる

① 2つの面を通るひも

直方体の頂点 A から、辺 BF 上の点 P を通って頂点 G まで、ひもをかけます。ひもが通る2つの面を、展開図で1つの長方形に開くと、2点を結ぶ線のうち最短のものは線分 AG です（中1）。



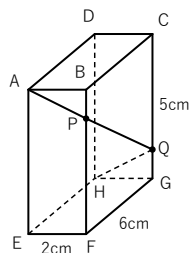
例1 2つの面を通る 4cm、6cm、9cm の直方体で、A から面 ABFE、面 BCGF の上を通って G まで。展開図では、横 4+6、縦 9 の長方形の対角線です。

$$x^2 = (4+6)^2 + 9^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理（展開図の長方形の対角線）}$$

$$x^2 = 100 + 81 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x = \sqrt{181} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから}$$

② 3つの面を通るひも



例2 3つの面を通る 2cm、6cm、5cm の直方体で、A から面 ABFE、面 BCGF、面 CDHG の3つの面の上を通って H まで、ひもをかけます。3つの面を横に並べて開きます。

展開図では、横が 2+6+2=10、縦が 5 の長方形の対角線 AH が、この3つの面を通るひものうちで最短です。

$$x^2 = 10^2 + 5^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理（展開図の長方形の対角線）}$$

$$x^2 = 125 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x = 5\sqrt{5} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5}$$

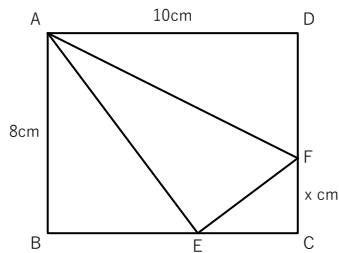
×空間の図の上で、2点を立体の中を通してまっすぐ結ぶ ○ひもは表面を通るので、展開図の上で線分にする（どの面を通るかを決めてから開く）

合言葉 「最短は、展開図の上でまっすぐ」

14 三平方の定理で方程式をつくるには？ — 同じ辺を2通りに表す

このページのゴール 長さを x とおいて三平方の定理で方程式をつくり、折り返した図や三角形の高さを求められる

① 紙を折り返した図



例1 長方形 ABCD の紙 (AB=8cm、AD=10cm) を、頂点 D が辺 BC 上の点 E に重なるように、A を通る線 AF で折ります (F は辺 CD 上)。CF=x cm を求めます。折り返して重なる辺は等しいので、AE=AD=10cm、EF=DF=(8-x) cm です。

△ABE (斜辺は AE) で、 $BE = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ cm なので、 $EC = 10 - 6 = 4$ cm です。△ECF で方程式ができます。

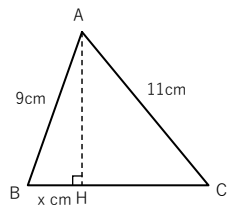
$$x^2 + 4^2 = (8-x)^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 (△ECF で、斜辺は EF)}$$

$$x^2 + 16 = 64 - 16x + x^2 \quad \leftarrow \text{右辺を展開する}$$

$$16x = 48 \quad \leftarrow x^2 \text{ が消えるので一次方程式。移項して整理する}$$

$$x = 3 \quad \leftarrow \text{両辺を16でわる}$$

② 3辺から高さを求める



例2 △ABC で AB=9cm、BC=10cm、CA=11cm です。A から BC に垂線 AH をひき、BH=x cm とすると、CH=(10-x) cm です。AH² を △ABH と △ACH の2通りに表します。

$$9^2 - x^2 = 11^2 - (10-x)^2 \quad \leftarrow AH^2 \text{ を } \triangle ABH \text{ と } \triangle ACH \text{ で表して等しいとおく}$$

$$81 - x^2 = 121 - (100 - 20x + x^2) \quad \leftarrow (10-x)^2 \text{ を展開する}$$

$$81 - x^2 = 21 + 20x - x^2 \quad \leftarrow \text{かっこをはずして整理する。} x^2 \text{ が消える}$$

$$20x = 60 \quad \leftarrow \text{移項して整理する}$$

$$x = 3 \quad \leftarrow \text{両辺を20でわる}$$

AH=h cm とすると、 $\sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72}$ より $h = 6\sqrt{2}$ cm、面積は $\frac{1}{2} \times 10 \times 6\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$ cm² です。

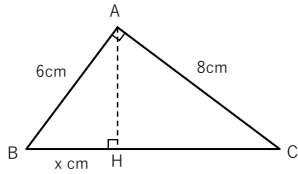
× $121 - (10-x)^2$ のかっこをはずすとき、 $-20x$ の符号を変えずに $121 - 100 - 20x - x^2$ とする ○ 中の全部の符号を変える： $121 - (10-x)^2 = 121 - 100 + 20x - x^2$

合言葉 「分からない長さは x 、同じ辺を2通りに表す」

15 相似や円と組み合わせるには？ — 補助線で直角三角形をつくる

このページのゴール 相似な図形の性質や円の接線の性質と三平方の定理を組み合わせ、線分の長さを求められる

① 直角三角形の斜辺への垂線



例1 $\angle A = 90^\circ$ 、 $AB = 6\text{cm}$ 、 $AC = 8\text{cm}$ の $\triangle ABC$ で、 A から斜辺 BC に垂線 AH をひきます。 BC を求めたあと、 AH は面積を2通りに表して、 $BH = x\text{ cm}$ は相似で求めます。

$$z^2 = 6^2 + 8^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理} (\triangle ABC \text{ で、斜辺は } BC. z \text{ は } BC)$$

$$z = 10 \quad \leftarrow z > 0 \text{ だから}$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times 10 \times y \quad \leftarrow \triangle ABC \text{ の面積を2通りに表す} (y \text{ は } AH)$$

$$24 = 5y \quad \leftarrow \text{計算する}$$

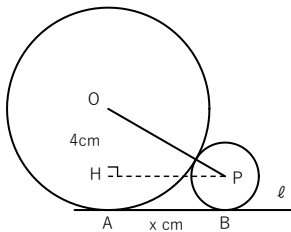
$$y = \frac{24}{5} \quad \leftarrow \text{両辺を5でわる}$$

$$6 : x = 10 : 6 \quad \leftarrow \triangle ABC \sim \triangle HBA \text{ } (90^\circ \text{ と共通な角}). AB : HB = BC : BA$$

$$10x = 36 \quad \leftarrow \text{外側の積 = 内側の積}$$

$$x = \frac{18}{5} \quad \leftarrow \text{両辺を10でわる}$$

② 2つの円と接線



例2 直線 l に点 A 、 B で接する、半径 6cm の円 O と半径 2cm の円 P が、たがいに接しています。接する点は OP の上にあるので、 $OP = 6 + 2 = 8\text{cm}$ です。 $AB = x\text{ cm}$ を求めます。

P から OA に垂線 PH をひくと、四角形 $ABPH$ は長方形で、 $HP = AB$ です。 OH は $6 - 2 = 4\text{ cm}$ で、 $\triangle OHP$ は直角三角形です。

$$x^2 + 4^2 = 8^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理} (\triangle OHP \text{ で、斜辺は } OP. x \text{ は } HP = AB)$$

$$x^2 = 48 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = 4\sqrt{3} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから}$$

× AB を、中心と中心の距離 OP とする $\angle OH$ を半径 6 のままにする ○ $AB = HP$ で、 $OH = 6 - 2$ は半径の差

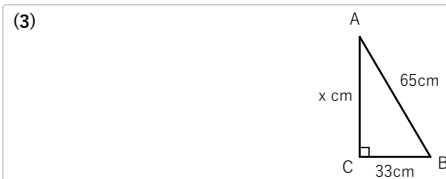
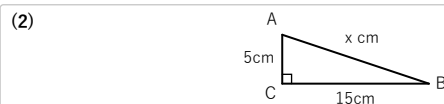
合言葉 「直角三角形が無ければ、補助線でつくる」

確認問題 ① 三平方の定理・逆・身のまわり

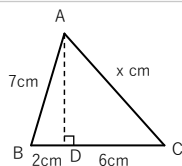
答えと解き方は20～23ページ（10・12枚目の紙）にあります。途中式は、問題のわくの中に書きましょう。【 】は、わからないときに読み直すページです。

1 三平方の定理 【3ページ】

次の直角三角形で、 x の値を求めなさい。(5) は図がありません。



(4) 辺BC上の点Dで、 $AD \perp BC$



(5) 直角三角形の2辺の長さが4cmと9cmです。残りの辺の長さとして考えられる長さを、すべて求めなさい。

2 三平方の定理の逆 【4ページ】

(1) 次のア～エのうち、直角三角形の3辺の長さの組をすべて選びなさい。

- ア 5cm、6cm、8cm
イ $\sqrt{3}$ cm、 $\sqrt{5}$ cm、 $\sqrt{8}$ cm
ウ 7cm、9cm、11cm
エ 6cm、4cm、 $\sqrt{20}$ cm

(2) $AB = 65$ cm、 $BC = 63$ cm、 $CA = 16$ cmの $\triangle ABC$ は直角三角形です。どの角が直角か求めなさい。

3 身のまわり 【5ページ】

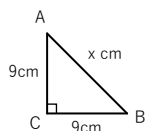
(1) はしご車のはしごを26mのばし、建物から10mはなれた地面に、付け根が地面から3mの高さになるように止めました。はしごの先の、地面からの高さは何mですか。

(2) 長さ17mのはしごを、下のはしがかべから8mはなれるように立てかけました。下のはしを、かべから7m遠ざけると、はしごの上のはしは何m下がりますか。

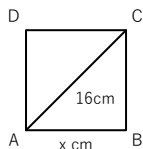
確認問題② 特別な直角三角形・高さと面積・座標

4 特別な直角三角形 【6ページ】

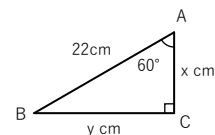
- (1) 直角二等辺三角形で、直角をはさむ辺が 9cm のとき、斜辺 $x\text{ cm}$ を求めなさい。



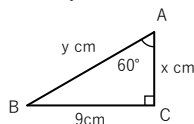
- (2) 対角線の長さが 16cm の正方形の1辺 $x\text{ cm}$ を求めなさい。



- (3) $30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ の直角三角形で、斜辺が 22cm のとき、ほかの2辺 $x\text{ cm}$ 、 $y\text{ cm}$ を求めなさい。

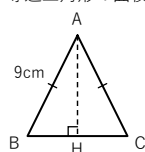


- (4) $30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ の直角三角形で、 $\sqrt{3}$ にあたる辺が 9cm のとき、短い辺 $x\text{ cm}$ と斜辺 $y\text{ cm}$ を求めなさい。

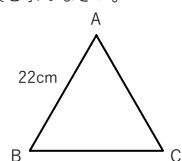


5 高さと面積 【7ページ】

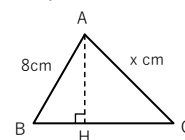
- (1) 底辺 8cm 、等しい辺が 9cm の二等辺三角形の面積を求めなさい。



- (2) 1辺 22cm の正三角形の面積を求めなさい。



- (3) $\triangle ABC$ で、 $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle C = 45^\circ$ 、 $AB = 8\text{cm}$ です。AC ($x\text{ cm}$) の長さを求めなさい。



6 2点間の距離 【8ページ】

- (1) 2点 $A(0, 1)$ 、 $B(3, 8)$ の間の距離を求めなさい。

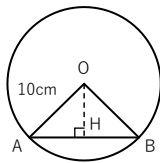
- (2) 2点 $A(-7, 2)$ 、 $B(1, 5)$ の間の距離を求めなさい。

- (3) $A(2, 1)$ 、 $B(-1, 3)$ 、 $C(5, 3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ は、どんな三角形ですか。理由も書きなさい。

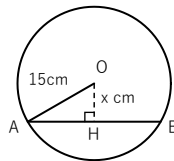
確認問題 ③ 円・直方体・角すい円すい

7 円 【9・10ページ】

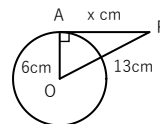
- (1) 半径 10cm の円で、中心から弦までの距離が 7cm のとき、弦の長さを求めなさい。



- (2) 半径 15cm の円で、弦の長さが 26cm のとき、中心から弦までの距離 x cm を求めなさい。



- (3) 円の外の点Pから接線をひきます。半径 $OA = 6$ cm、 $OP = 13$ cm のとき、接線の長さPA (x) を求めなさい。

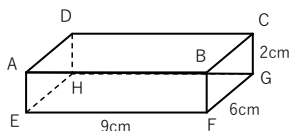


- (4) 地球を半径 6400km の球とみます。高さ 0.32km (320m) の山の頂上から見える、いちばん遠い所までの距離は、約何 km ですか。

【10ページ】

8 直方体の対角線 【11ページ】

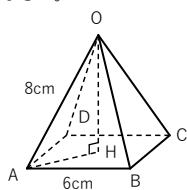
- (1) 図の直方体の対角線AGの長さを求めなさい。



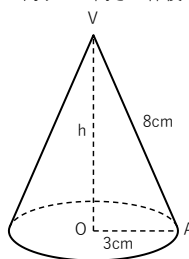
- (2) 対角線の長さが 15cm の立方体の1辺 x cm を求めなさい。

9 角すい・円すい 【12ページ】

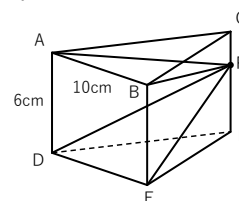
- (1) 底面が1辺6cmの正方形で、側面の辺OAが8cmの正四角すいの高さと体積を求めなさい。



- (2) 底面の半径3cm、母線8cmの円すいの高さと体積を求めなさい。



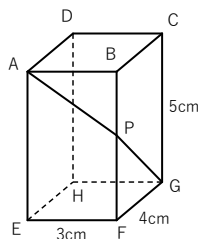
- (3) 底面が1辺10cmの正三角形ABCで、ADが底面に垂直な、 $AD = 6$ cmの三角柱ABC-DEFがあります。辺CF上の、C、Fと重ならない点Pを頂点とする四角すいP-ADEBの体積を求めなさい。



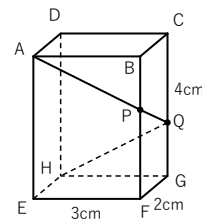
確認問題 ④ 最短の長さ・方程式・相似や円

10 最短の長さ 【13ページ】

(1) 図の直方体で、頂点Aから辺BF上の点Pを通して頂点Gまで、面ABFEと面BFGCの上にひもをかけます。ひもの長さがいちばん短くなるときの長さを求めなさい。

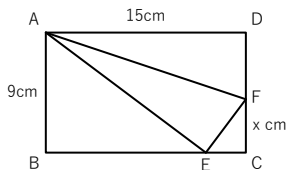


(2) 図の直方体で、頂点Aから、面ABFE、面BCGF、面CDHGの3つの面の上をって頂点Hまで、ひもをかけます。この3つの面を通るひものうち、いちばん短くなるときの長さを求めなさい。

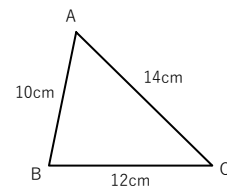


11 方程式をつくる 【14ページ】

(1) 長方形ABCDの紙（AB=9cm、AD=15cm）を、頂点Dが辺BC上の点Eに重なるように、Aを通る線AFで折りました（Fは辺CD上）。CF=x cmとして、xの値を求めなさい。

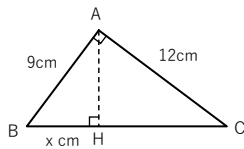


(2) $\triangle ABC$ で、AB=10cm、BC=12cm、CA=14cmです。 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

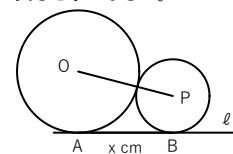


12 相似・円と組み合わせる 【15ページ】

(1) $\angle A = 90^\circ$ 、AB=9cm、AC=12cmの $\triangle ABC$ で、AからBCに垂線AHをひきます。BHの長さ（x cm）を求めなさい。



(2) 直線 ℓ に点A、Bで接する、半径5cmの円Oと半径3cmの円Pが、たがいに接しています。接する点はOPの上にあります。AB（x cm）の長さを求めなさい。



確認問題の答えと解き方

式を1行ずつ変形しています。右の小さい字は、その行でしたことです。太字で網かけの行が答え、【 】は読み直すページです。比例式 $a:b=c:d$ は、外側の積＝内側の積（ $ad=bc$ ）を使って解きます。

1 三平方の定理 【3ページ】

- (1) $x^2=60^2+11^2$ ←三平方の定理（斜辺は x ）
 $x^2=3721$ ←計算する
 $x=61$ ← $x>0$ だから
- (2) $x^2=15^2+5^2$ ←三平方の定理（斜辺は x ）
 $x^2=250$ ←計算する
 $x=5\sqrt{10}$ ← $x>0$ だから。 $\sqrt{250}=\sqrt{25\times 10}$
- (3) $x^2+33^2=65^2$ ←三平方の定理（斜辺は 65）
 $x^2=4225-1089$ ←移項して計算する
 $x^2=3136$ ←計算する
 $x=56$ ← $x>0$ だから
- (4) 先に $\triangle ABD$ で、 $AD=y$ cm を求める
 $y^2+2^2=7^2$ ←三平方の定理（ $\triangle ABD$ で、斜辺は AB ）
 $y^2=45$ ←移項して計算する
次に $\triangle ADC$ で、 $AC=x$ cm を求める
 $x^2=45+6^2$ ←三平方の定理（ $\triangle ADC$ で、斜辺は AC 。 $AD^2=45$ ）
 $x^2=81$ ←計算する
 $x=9$ ← $x>0$ だから
- (5) 残りの辺が斜辺のとき
 $x^2=4^2+9^2$ ←三平方の定理（斜辺は x ）
 $x^2=97$ ←計算する
 $x=\sqrt{97}$ ← $x>0$ だから
9cm の辺が斜辺のとき
 $x^2+4^2=9^2$ ←三平方の定理（斜辺は 9cm の辺）
 $x^2=65$ ←移項して計算する
 $x=\sqrt{65}$ ← $x>0$ だから
答え $\sqrt{97}$ cm、 $\sqrt{65}$ cm

2 三平方の定理の逆 【4ページ】

- (1) ア $5^2+6^2=61$ 、 $8^2=64$ で等しくない
イ $(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2=8$ 、 $(\sqrt{8})^2=8$ で等しい
ウ $7^2+9^2=130$ 、 $11^2=121$ で等しくない
エ いちばん長い辺は 6cm。 $4^2+(\sqrt{20})^2=36$ 、 $6^2=36$ で等しい
答え イ、エ
- (2) いちばん長い辺は AB (65cm)。 $16^2+63^2=4225$ 、 $65^2=4225$ で等しいので、 AB を斜辺とする直角三角形。直角は AB の向かい側の角
答え $\angle C$

3 身のまわり 【5ページ】

- (1) はしごの先の、付け根からの高さを x m とする
 $x^2+10^2=26^2$ ←三平方の定理（斜辺ははしごの 26）
 $x^2=676-100$ ←移項して計算する
 $x^2=576$ ←計算する
 $x=24$ ← $x>0$ だから
地面からの高さは $24+3=27$
答え 27m
- (2) ずらす前の高さ x m
 $x^2+8^2=17^2$ ←三平方の定理（斜辺は 17）
 $x^2=289-64$ ←移項して計算する
 $x^2=225$ ←計算する
 $x=15$ ← $x>0$ だから
ずらした後は、かべから $8+7=15$ m で、高さ y m
 $y^2+15^2=17^2$ ←三平方の定理（斜辺は 17）
 $y^2=289-225$ ←移項して計算する
 $y^2=64$ ←計算する
 $y=8$ ← $y>0$ だから
下がった長さは $15-8=7$
答え 7m

4 特別な直角三角形 【6ページ】

- (1) $1:\sqrt{2}=9:x$ ←直角をはさむ辺：斜辺 $=1:\sqrt{2}$
 $x=9\sqrt{2}$ ←外側の積＝内側の積
- (2) $1:\sqrt{2}=x:16$ ←1辺：対角線 $=1:\sqrt{2}$
 $\sqrt{2}x=16$ ←外側の積＝内側の積
 $x=\frac{16}{\sqrt{2}}$ ←両辺を $\sqrt{2}$ でわる
 $x=8\sqrt{2}$ ←分母を有理化する ($\frac{16}{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{2}$)
- (3) $1:2=x:22$ ←短い辺：斜辺 $=1:2$
 $x=11$ ←外側の積＝内側の積
 $1:\sqrt{3}=11:y$ ←短い辺：残りの辺
 $y=11\sqrt{3}$ ←外側の積＝内側の積
- (4) $1:\sqrt{3}=x:9$ ←短い辺：残りの辺
 $\sqrt{3}x=9$ ←外側の積＝内側の積
 $x=\frac{9}{\sqrt{3}}$ ←両辺を $\sqrt{3}$ でわる
 $x=3\sqrt{3}$ ←分母を有理化する ($\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3}$)
 $y=2\times 3\sqrt{3}$ ←斜辺は短い辺の2倍
 $y=6\sqrt{3}$ ←計算する

5 高さと面積 【7ページ】

- (1) 高さ AH は
 $x^2 + 4^2 = 9^2$ ←三平方の定理 (△ABH で、x は AH。底辺の半分 4cm)
 $x^2 = 65$ ←移項して計算する
 $x = \sqrt{65}$ ← $x > 0$ だから
 面積は $\frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{65} = 4\sqrt{65}$
答え $4\sqrt{65} \text{ cm}^2$
- (2) 半分の直角三角形は $30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ 。底辺の半分は 11cm
 $1 : \sqrt{3} = 11 : x$ ←底辺の半分 : 高さ = $1 : \sqrt{3}$
 $x = 11\sqrt{3}$ ←外側の積 = 内側の積
 面積は $\frac{1}{2} \times 22 \times 11\sqrt{3} = 121\sqrt{3}$
答え $121\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- (3) A から BC に垂線 AH をひく
 $1 : 2 = y : 8$ ←△ABH は $30^\circ \cdot 60^\circ \cdot 90^\circ$ 。短い辺 BH = y : 斜辺 AB = $1 : 2$
 $y = 4$ ←外側の積 = 内側の積
 $1 : \sqrt{3} = 4 : z$ ←短い辺 BH : AH = z = $1 : \sqrt{3}$
 $z = 4\sqrt{3}$ ←外側の積 = 内側の積
 $1 : \sqrt{2} = 4\sqrt{3} : x$ ←△AHC は 45° の直角三角形。AH : AC = $1 : \sqrt{2}$
 $x = 4\sqrt{6}$ ←外側の積 = 内側の積 ($\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} = 4\sqrt{6}$)

6 2点間の距離 【8ページ】

- (1) $x^2 = (3-0)^2 + (8-1)^2$ ←三平方の定理 (横の差² + 縦の差²)
 $x^2 = 9 + 49$ ←計算する
 $x^2 = 58$ ←計算する
 $x = \sqrt{58}$ ← $x > 0$ だから
- (2) $x^2 = (1 - (-7))^2 + (5-2)^2$ ←三平方の定理 (横の差² + 縦の差²)
 $x^2 = 64 + 9$ ←計算する
 $x^2 = 73$ ←計算する
 $x = \sqrt{73}$ ← $x > 0$ だから
- (3) 横の差と縦の差は、AB が -3 と 2、AC が 3 と 2、BC が 6 と 0
 $(-3)^2 + 2^2 = 13$ ←AB²
 $3^2 + 2^2 = 13$ ←AC²
 $6^2 + 0^2 = 36$ ←BC²
 AB = AC なので二等辺三角形。いちばん長い辺は BC で、 $13 + 13 = 26$ は $6^2 = 36$ と等しくないので、直角三角形ではない
答え AB = AC の二等辺三角形
 (直角三角形ではない)

7 円 【9・10ページ】

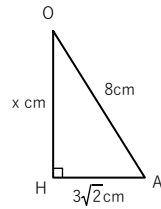
- (1) AH は
 $x^2 + 7^2 = 10^2$ ←三平方の定理 (△OAH で、x は AH)
 $x^2 = 51$ ←移項して計算する
 $x = \sqrt{51}$ ← $x > 0$ だから
 弦 AB は AH の2倍で $\sqrt{51} \times 2 = 2\sqrt{51}$
答え $2\sqrt{51} \text{ cm}$
- (2) AH は弦 AB の半分で 13cm
 $x^2 + 13^2 = 15^2$ ←三平方の定理 (△OAH で、x は OH)
 $x^2 = 56$ ←移項して計算する
 $x = 2\sqrt{14}$ ← $x > 0$ だから
- (3) $x^2 + 6^2 = 13^2$ ←三平方の定理 (△OAP で、x は PA)
 $x^2 = 133$ ←移項して計算する
 $x = \sqrt{133}$ ← $x > 0$ だから (133 はこれ以上簡単にならない)
- (4) 山の高さを h = 0.32km、接点を T とすると $PT^2 = (12800 + h) \times h$
 $12800.32 \times 0.32 = 4096.1024$
 4096.1024 は $64^2 = 4096$ とほとんど同じなので、PT はほぼ 64
答え 約64km

8 直方体の対角線 【11ページ】

- (1) 底面の対角線 EG = y cm は
 $y^2 = 9^2 + 6^2$ ←三平方の定理 (△EFG)
 $y^2 = 117$ ←計算する
 対角線 AG = x cm は
 $x^2 = 117 + 2^2$ ←三平方の定理 (△AEG、∠AEG = 90°)
 $x^2 = 121$ ←計算する
 $x = 11$ ← $x > 0$ だから
- (2) $x^2 + x^2 + x^2 = 15^2$ ←縦・横・高さがすべて x の対角線
 $3x^2 = 225$ ←計算する
 $x^2 = 75$ ←両辺を3でわる
 $x = 5\sqrt{3}$ ← $x > 0$ だから。 $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3}$

9 角すい・円すい 【12ページ】

- (1) 底面の対角線の半分 AH は $6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2}$ cm



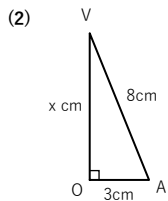
$$x^2 + (3\sqrt{2})^2 = 8^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理} (\triangle OAH \text{ で、} x \text{ は高さ OH})$$

$$x^2 = 64 - 18 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = \sqrt{46} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから}$$

$$\text{体積は } \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \sqrt{46} = 12\sqrt{46}$$

答え 高さ $\sqrt{46}$ cm、体積 $12\sqrt{46}$ cm³



$$x^2 + 3^2 = 8^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理} (\triangle OAV \text{ で、} x \text{ は高さ OV})$$

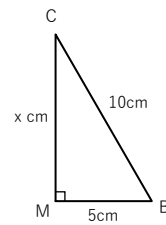
$$x^2 = 55 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = \sqrt{55} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから}$$

$$\text{体積は } \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times \sqrt{55} = 3\sqrt{55}\pi$$

答え 高さ $\sqrt{55}$ cm、体積 $3\sqrt{55}\pi$ cm³

- (3) C から AB に垂線 CM をひくと、CM は面 ADEB に垂直で、P が CF のどこにあって高さ CM (正三角形 ABC の高さ)。AM = MB = 5 cm



$$x^2 + 5^2 = 10^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理} (\triangle CMB \text{ で、斜辺は BC。} x \text{ は CM})$$

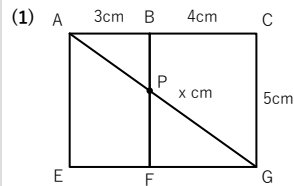
$$x^2 = 75 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = 5\sqrt{3} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから}$$

$$\text{体積は } \frac{1}{3} \times (10 \times 6) \times 5\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$$

答え $100\sqrt{3}$ cm³

10 最短の長さ 【13ページ】

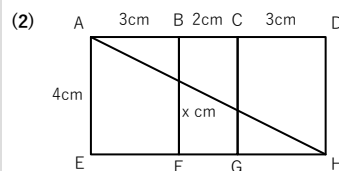


$$x^2 = (3 + 4)^2 + 5^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 (展開図の長方形の対角線)}$$

$$x^2 = 49 + 25 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x^2 = 74 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x = \sqrt{74} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから}$$



$$x^2 = (3 + 2 + 3)^2 + 4^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 (展開図の長方形の対角線)}$$

$$x^2 = 64 + 16 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

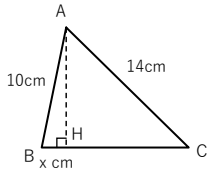
$$x^2 = 80 \quad \leftarrow \text{計算する}$$

$$x = 4\sqrt{5} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。}\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5}$$

11 方程式をつくる 【14ページ】

- (1) 折ると D が E に重なるので、 $AE = AD = 15\text{cm}$ 、 $EF = DF = (9 - x)\text{cm}$ 。先に $\triangle ABE$ で $BE = y\text{cm}$ を求める
 $y^2 + 9^2 = 15^2$ ←三平方の定理 ($\triangle ABE$ で、斜辺は AE)
 $y^2 = 144$ ←移項して計算する
 $y = 12$ ← $y > 0$ だから
 $EC = 15 - 12 = 3\text{cm}$
 $x^2 + 3^2 = (9 - x)^2$ ←三平方の定理 ($\triangle ECF$ で、斜辺は EF)
 $x^2 + 9 = 81 - 18x + x^2$ ←右辺を展開する
 $18x = 72$ ← x^2 が消えるので一次方程式。移項して整理する
 $x = 4$ ←両辺を18でわる

- (2) A から BC に垂線 AH をひき、 $BH = x\text{cm}$ とすると $CH = (12 - x)\text{cm}$



$$10^2 - x^2 = 14^2 - (12 - x)^2 \quad \leftarrow AH^2 \text{ を } \triangle ABH \text{ と } \triangle ACH \text{ の2通りで表す}$$

$$100 - x^2 = 196 - (144 - 24x + x^2) \quad \leftarrow (12 - x)^2 \text{ を展開する}$$

$$100 - x^2 = 52 + 24x - x^2 \quad \leftarrow \text{かっこをはずして整理する。} x^2 \text{ が消える}$$

$$24x = 48 \quad \leftarrow \text{移項して整理する}$$

$$x = 2 \quad \leftarrow \text{両辺を24でわる}$$

$$h^2 + 2^2 = 10^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 } (\triangle ABH \text{ で、} h \text{ は } AH)$$

$$h^2 = 96 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

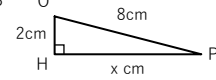
$$h = 4\sqrt{6} \quad \leftarrow h > 0 \text{ だから。} \sqrt{96} = \sqrt{16 \times 6}$$

面積は $\frac{1}{2} \times 12 \times 4\sqrt{6} = 24\sqrt{6}$

答え $24\sqrt{6}\text{ cm}^2$

12 相似・円と組み合わせる 【15ページ】

- (1) $y^2 = 9^2 + 12^2$ ←三平方の定理 ($\triangle ABC$ で、斜辺は BC 。y は BC)
 $y = 15$ ← $y > 0$ だから
 $9 : x = 15 : 9$ ← $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (90° と共通な角)。 $AB : HB = BC : BA$
 $15x = 81$ ←外側の積 = 内側の積
 $x = \frac{27}{5}$ ←両辺を15でわる
- (2) P から OA に垂線 PH をひくと、四角形 ABPH は長方形で、 $HP = AB$ 。OH = 5 - 3 = 2、OP = 5 + 3 = 8



$$x^2 + 2^2 = 8^2 \quad \leftarrow \text{三平方の定理 } (\triangle OHP \text{ で、斜辺は } OP. x \text{ は } HP = AB)$$

$$x^2 = 60 \quad \leftarrow \text{移項して計算する}$$

$$x = 2\sqrt{15} \quad \leftarrow x > 0 \text{ だから。} \sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15}$$